ГБПОУ КК ЛТК

Методическое пособие по математике для учащихся НПО

.

2018г.

Решение линейных уравнений

Правило 1: Слагаемые с «х» собираем в левой части уравнения, а числа в правой. Через знак равенства «=», слагаемые переносятся с противоположным знаком действия. (Пр. 1-2).

Правило 2: Если перед скобками стоит знак «+» - то скобки опускаем. (Пр. 3).

Если перед скобками стоит знак «-» - то скобки опускаем, знаки в скобках меняем. (Пр. 4).

Правило 3: При умножении числа на выражение в скобках, это число умножается на каждое слагаемое в этих скобках. (Пр. 5-6).

ПР1. $2x - 8 = 0$

$2x = 8$

$x = 4$

Ответ: 4.

ПР2. $4x - 5 = 6x + 9$

$4x - 6x = 9 + 5$

$-2x = 14$

$x = -7$

Ответ: -7

ПР3. $2x + (4 - 3x) = 7$

$2x + 4 - 3x = 7$

$2x - 3x = 7 - 4$

$-x = 3$

$x = -3$

Ответ: -3

ПР4. $4 - (5 - 6x) = 7 + 4x$

$4 - 5 + 6x = 7 + 4x$

$6x - 4x = 7 - 4 + 5$

$2x = 8$

$x = 4$

Ответ: 4

ПР5. $2x - 4(3 - x) = 3x + 9$

$2x - 12 + 4x = 3x + 9$

$2x + 4x - 3x = 9 + 12$

$3x = 21$

$x = 7$

Ответ: 7

ПР6. $8 + 3(3x - 3) = 7x + 6$

$8 + 9x - 9 = 7x + 6$

$9x - 7x = 6 - 8 + 9$

$2x = 7$

$x = 3,5$

Ответ: 3,

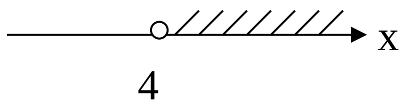
Решение линейных неравенств.

Правило 1: Линейное неравенство решается так же, как линейное уравнение.
Правило 2: При делении обеих частей неравенства на отрицательное число, знак неравенства меняется на противоположный. (Пр. 2-3).
Правило 3: Если неравенство строгое (имеет знаки **«>» «<»**), то точка на числовой оси пустая, а скобка в ответе **«)»**. (Пр. 1,3,5). Если неравенство нестрогое (имеет знаки **«≤» «≥»**), то точка на числовой оси закрашенная, а скобка в ответе **«]»**. (Пр. 2,4,6).

ПР1. $2x - 8 > 0$

$2x > 8$

$x > 4$



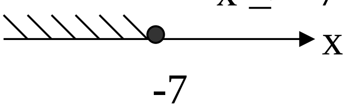
Ответ: x Є (4;+∞)

ПР2. $4x - 5 \geq 6x + 9$

$4x - 6x \geq 9 + 5$

$-2x \geq 14$

$x \leq -7$



Ответ: x Є $(-\infty;-7]$

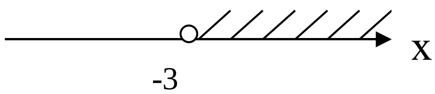
ПР3. $2x + (4 - 3x) < 7$

$2x + 4 - 3x < 7$

$2x - 3x < 7 - 4$

$-x < 3$

$x.>- 3$



Ответ: x Є (-3; +∞)

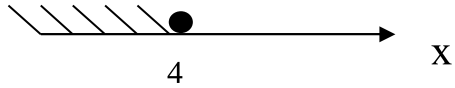
ПР4. $4 - (5 - 6x) \leq 7 + 4x$

$4 - 5 + 6x \leq 7 + 4x$

$6x - 4x \leq 7 - 4 + 5$

$2x \leq 8$

$x \leq 4$



Ответ: x Є (- ∞; 4]

ПР5. $2x - 4(3 - x) > 3x + 9$

$2x -12 + 4x > 3x + 9$

$2x + 4x - 3x > 9 + 12$

$3x > 21$

$x > 7$

Ответ x Є (7; +∞)

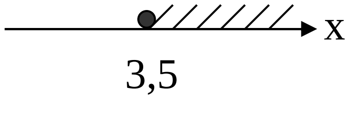
ПР6. $8 + 3(3x -3) \geq 7x +6$

$8 + 9x - 9 \geq 7x + 6$

$9x - 7x \geq 6 - 8 + 9$

$2x \geq 7$

$x \geq 3,5$



Ответ: x Є [3,5; +∞)

Решение неполных квадратных уравнений.

1 тип:

$ax^2 = 0$ в = 0; с = 0

$x_{1,2} = 0$

Ответ: 0

Пример1.

$20\,x^2 = 0$

$x_{1,2} = 0$

Ответ: 0

2 тип:

$a\,x^2 + в\,x = 0$; $c = 0$

$x \cdot (ax + в) = 0$

$x_1 = 0$ или $ax + в = 0$

$ax = -в$

$x_2 = -в/a$

Ответ: 0; $-в/a$

Пример 2.

$3\,x^2 + 6\,x = 0$

$x \cdot (3x + 6) = 0$

$x_1 = 0$ или $3x + 6 = 0$

$3x = -6$

$x_2 = -2$

Ответ: 0; -2

3 тип:

$ax^2 + c = 0$ в = 0

$ax^2 = -c$

$x^2 = -c/a$

$x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$

Ответ: $\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$

Пример 3.

$2x^2 - 72 = 0$

$2x^2 = 72$

$x^2 = 36$

$x_{1,2} = \pm 6$

Ответ: ± 6

$\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$ $\sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = 4\sqrt{2}$

Решение полных квадратных уравнений.

***Правило*:**

$\boldsymbol{a}\mathbf{x^2} + \boldsymbol{в}\mathbf{x} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$

$\mathbf{D} = \boldsymbol{в}^2 - \mathbf{4} \cdot \boldsymbol{a} \cdot \mathbf{c}$

1) если **D > 0**, то уравнение имеет 2 различных корня:

$$x_1 = \frac{-в + \sqrt{D}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-в - \sqrt{D}}{2a}$$

2) если **D = 0**, то уравнение имеет 2 одинаковых корня:

$$x_{1,2} = \frac{-в}{2a}$$

3) если **D < 0**, то уравнение действительных корней не имеет.

Пример 1. $3x^2 + 7x – 6$; a = 3; в = 7; c = - 6

$D = в^2 - 4 \cdot a \cdot c = 49 – 4 \cdot 3 \cdot (- 6) = 49 + 72 = 121 = 11^2$

$$x_1 = \frac{-7+11}{2 \cdot 3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}; \quad x_2 = \frac{-7-11}{2 \cdot 3} = \frac{-18}{6} = -3$$

Ответ: 2/3; 3

Пример 2. $x^2 - 2x + 1 = 0$; a = 1; в = -2; c = 1

$D = в^2 - 4ac = 4 – 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-в}{2a} = \frac{2}{2} = 1$$

Ответ: 1

Пример 3: $x^2 - 2x + 5 = 0$; a = 1; в = -2; c = 5

$D = в^2 - 4ac = 4 – 4 \cdot 1 \cdot 5 = 4 – 20 = -16 < 0$

Ответ: решений нет.

Разложение квадратного трёхчлена на множители.

$$\mathbf{ax^2 + вx + c = a(x – x_1)(x - x_2)},$$

где x_1 и x_2 – корни уравнения.

$$3x^2 - 4x + 1 = 3(x - 1) \cdot (x – 1/3) = (x - 1) \cdot (3x - 1)$$

если $x_1 = x_2$, $ax^2 + bx + c = a(x – x_1)^2$

Сократить дробь:

$$\frac{5x^2 - 3x - 2}{5x^2 - 13x - 6} = \frac{5(x-1)\left(x + \frac{2}{5}\right)}{5(x-3)\left(x + \frac{2}{5}\right)} = \frac{x-1}{x-3}$$

Решение квадратных неравенств.

Правило 1.

Если вам нужно решить квадратное неравенство, найдите корни функции, приравняв её к нулю.

Правило 2.

Отметьте на числовой оси точки соответствующие корням в порядке возрастания. Если неравенство был строгое (содержит знак « > » или « < ») точки не закрашивать, а если неравенство нестрогое (содержит знак « ≤ » или « ≥ »), точки закрасить.

Правило 3.

Полученные интервалы отметить дугами. Внутри каждого интервала определить знак функции. Применим метод интервалов:
а) если **а > 0** (а – число стоящее перед x^2), то справа начать со знака **« + »**;
б) если **а < 0,** то справа начать со знака **« - »**.

Правило 4.

Если в одной точке находится **2** корня (или **чётное** количество корней), то знак, проходя через эту точку, **не меняется**. Если в одной точке находится **1** корень (или **нечётное** количество корней), то знак, проходя через эту точку, меняется на **противоположный**.

Правило 5.

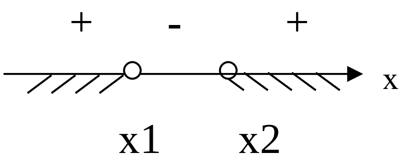
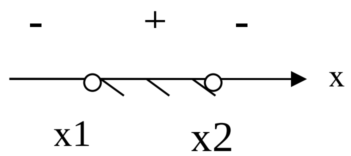
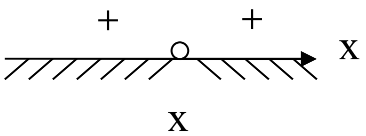
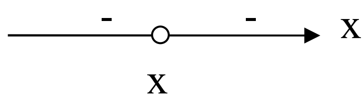
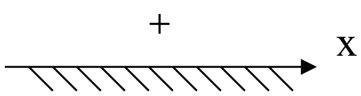
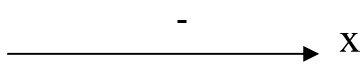
Если неравенство имело знак **«>»** или **«≥»**, то в ответ выписать интервалы, имеющие знак **« + »,** в противном случае в ответ выписать интервалы, имеющие знак **« - »**.

Схема решения квадратных неравенств.

$a\,x^2 + вx + c > 0$

$a\,x^2 + вx + c = 0$

Найдите корни:

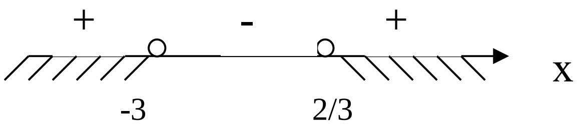
если а > 0	**если а < 0**
1. Два различных корня: $x_1 < x_2$  Ответ: $x \in (-\infty;\, x_1) \cup (x_2;+\infty)$	1.Два различных корня: $x_1 < x_2$  Ответ: $x \in (\,x_1; x_2)$
1.Два одинаковых корня: $x_1 = x_2 = x$  Ответ: $x \in (-\infty;\, x) \cup (x;+\infty)$	1. Два одинаковых корня: $x_1 = x_2 = x$  Ответ: решений нет.
3. Корней нет:  Ответ: $x \in (-\infty;+\infty)$	3. Корней нет:  Ответ: решений нет.

Пример 1. $3\,x^2 + 7x - 6 > 0$

$3\,x^2 + 7x - 6 = 0$; $a = 3$; $в = 7$; $c = -6$

$D = в^2 - 4 \cdot a \cdot c = 49 - 4 \cdot 3 \cdot (-6) = 49 + 72 = 121 = 11^2$

$$x_1 = \frac{-в + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-7 + 11}{2 \cdot 3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \qquad x_2 = \frac{-в - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-7 - 11}{6} = \frac{-18}{6} = -3$$



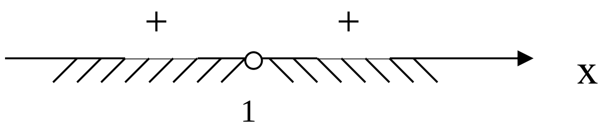
Ответ: x Є (-∞; -3)U(2/3;+ ∞)

Пример 2. $x^2 - 2x + 1 > 0$

$x^2 - 2x + 1 = 0$ $a = 1$; $в = -2$; $c = 1$.

$D = в^2 - 4 \cdot a \cdot c = 4 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-в}{2a} = \frac{2}{2} = 1$$



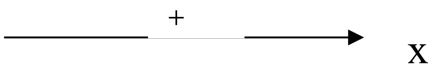
Ответ: x Є (-∞; 1)U(1;+ ∞)

Пример 3

$x^2 - 2x + 5 < 0$

$x^2 - 2x + 5 = 0$

$D = в^2 - 4ac = 4 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 4 - 20 = -16 < 0$



Ответ: решений нет.

Формулы сокращённого умножения.

1) **$a^2 - в^2 = (a - в) \cdot (a + в)$**

Пример 1:

$x^2 - 64 = x^2 - 8^2 = (x - 8)(x + 8)$

$(3x - 5)(3x + 5) = (3x)^2 - 5^2 = 9x^2 - 25$

2) **$(a - в)^2 = a^2 - 2aв + в^2$**

Пример 2:

$(2x - 5)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2 \cdot 5x + 5^2 = 4x^2 - 20x + 25$

$$9x^2 - 6x + 1 = (3x)^2 - 2 \cdot 3x + 1^2 = (3x - 1)^2$$

3) <u>$(а + в)^2 = а^2 + 2ав + в^2$</u>

Пример 3:

$$(4x + 3)^2 = (4x)^2 + 2 \cdot 4 \cdot 3x + 3^2 = 16x^2 + 24x + 9$$

$$x^2 + 14x + 49 = x^2 + 2 \cdot 7x + 7^2 = (x + 7)$$

Системы уравнений.

Решением системы двух уравнений с двумя неизвестными называется **пара** чисел (x_0, y_0), при подстановке которых вместо соответствующих переменных x, y **оба** уравнения системы обращаются в верные числовые равенства.

Примеры:

1. $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x + 3y = 9 \end{cases}$ Решение системы: (3; 1)

2. $\begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 2 \end{cases}$ Решения системы: (−1; 1) и (2; 4)

Решить систему уравнений — значит найти все ее решения или доказать, что решений нет.

Равносильными называются системы, множества решений которых совпадают.

В частности, равносильны все системы, не имеющие решений. Система, не имеющая решений, называется *несовместной*.

Пример несовместной системы:

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 3x + 6y = 5 \end{cases}$$

Замечание. Наряду с системами уравнений часто рассматриваются *совокупности* уравнений. Решением совокупности является объединение решений всех уравнений совокупности.

Для обозначения совокупности уравнений используют квадратную скобку.

ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

МЕТОД ПОДСТАНОВКИ

Этапы решения	Примеры	
1. С помощью какого-либо из уравнений выразить одно неизвестное через другое.	$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x + 3y = 9 \end{cases}$ из первого уравнения $y = 2x - 4$	$\begin{cases} x^2 + xy - y^2 = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$ из второго уравнения $y = 2 - x$
2. Подставить найденное выражение в другое уравнение системы: в результате получится одно уравнение с одним неизвестным.	$x + 3(2x - 4) = 9;$ $7x = 21$	$x^2 + x(2 - x) -$ $- (2 - x)^2 = 1;$ $x^2 - 6x + 5 = 0$
3. Найти корень (корни) этого уравнения, то есть найти значение (значения) одного из неизвестных системы.	$x = 3$	$x_1 = 1;$ $x_2 = 5$
4. Использовать найденное выражение одного неизвестного через другое (подстановку), то есть найти значение (соответствующие значения) второго неизвестного.	$y = 2x - 4 =$ $= 2 \cdot 3 - 4 = 2$	$y_1 = 2 - x_1 =$ $= 2 - 1 = 1;$ $y_2 = 2 - x_2 =$ $= 2 - 5 = -3$
5. Записать ответ.	$(3; 2)$	$(1; 1), (5; -3)$

МЕТОД СЛОЖЕНИЯ

Этапы решения	Примеры	
1. Сложить почленно уравнения системы, умножив предварительно каждое из уравнений на подходящее число так, чтобы в результате сложения получилось одно уравнение с одним неизвестным.	$\begin{cases}4x + 5y = 19 \\ 7x - 4y = -5\end{cases} \begin{vmatrix}\times 4 \\ \times 5\end{vmatrix}$ $\begin{cases}16x + 20y = 76 \\ 35x - 20y = -25\end{cases}$ $51x = 51$	$\begin{cases}2xy + x^2 = 2 \\ 3xy - 4x = 5\end{cases} \begin{vmatrix}\times 3 \\ \times(-2)\end{vmatrix}$ $\begin{cases}6xy + 3x^2 = 6 \\ -6xy + 8x = -10\end{cases}$ $3x^2 + 8x = -4$
2. Найти корень (корни) этого уравнения, то есть найти значение (значения) одного из неизвестных системы.	$x = 1$	$x_1 = -2;$ $x_2 = -2/3$
3. Подставить найденное значение (значения) одного из неизвестных в любое из уравнений системы: в результате снова получится уравнение (уравнения) с одним неизвестным.	Подстановка в первое уравнение дает: $4 \cdot 1 + 5y = 19;$ $5y = 15$	Подстановка во второе уравнение дает: при $x = x_1 = -2$ $6y = 3;$ при $x = x_2 = -2/3$ $2y = -7/3$
4. Найти решение (решения) этого уравнения (этих уравнений), то есть найти значение (соответствующие значения) второго неизвестного.	$y = 3$	$y_1 = 1/2;$ $y_2 = -7/6$
5. Записать ответ.	$(1;\ 3)$	$(-2;\ 1/2),$ $(-2/3;\ -7/6)$

Функции и их графики.

1. Общие свойства функций

Переменная **у** называется **функцией переменной х,** если каждому значению х, принадлежащему некоторому множеству Х, поставлено в соответствие единственное значение переменной у. Переменная **х** называется **независимой, или аргументом** функции, а переменная **у** – **зависимой.**

Множество **Х** называется **областью определения функции (D(у)).**
Графиком функции у = f (х) называется множество точек (х,у) на плоскости, координаты которых удовлетворяют соотношению у = f (х).

Функция у = f (х) называется **чётной,** если при любом $x \in X$ выполнено равенство **f(-х) = f(х).** График чётной функции симметричен относительно оси Оу (оси ординат).

Функция у = f (х) называется **нечётной,** если при любом $x \in X$ выполнено равенство **f(-х) = - f(х).** График нечётной функции симметричен относительно начала координат.

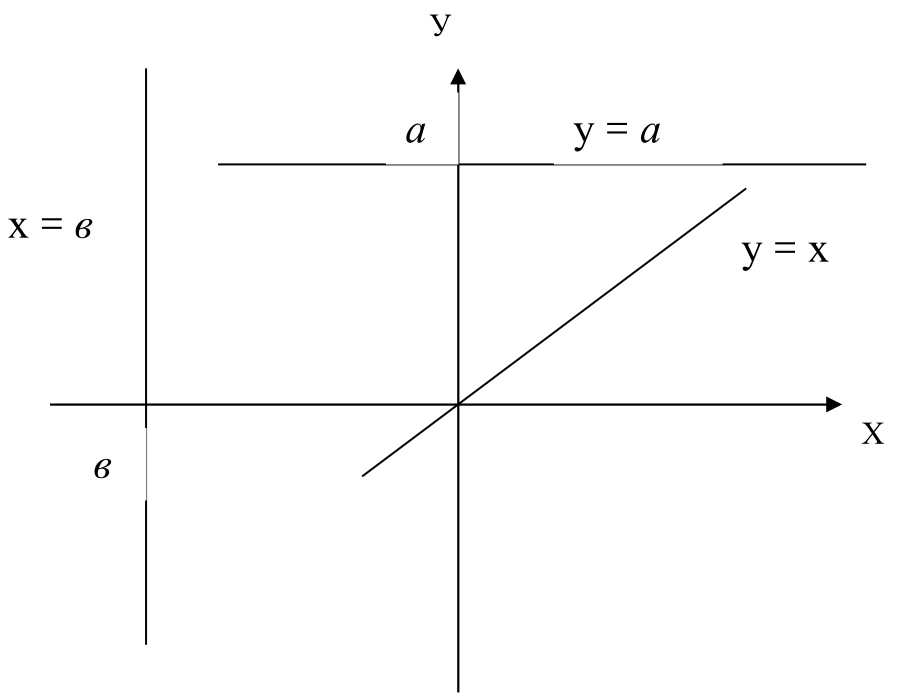
1. Основные элементарные функции и их графики.

Линейная функция $y = \kappa x + в$.

D(у) = R

График прямая линия, если ***к* > *0,*** то функция возрастает на R;

Если ***к* < *0,*** то функция убывает на R.

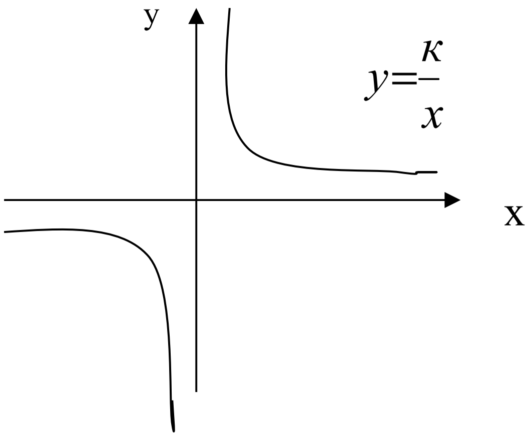


Обратно пропорциональная зависимость $y = \frac{1}{x}.$

Область определения : D(y) =R / 0;

Область значений: E(y) = R / 0;

График – гипербола, с осями координат не пересекается:

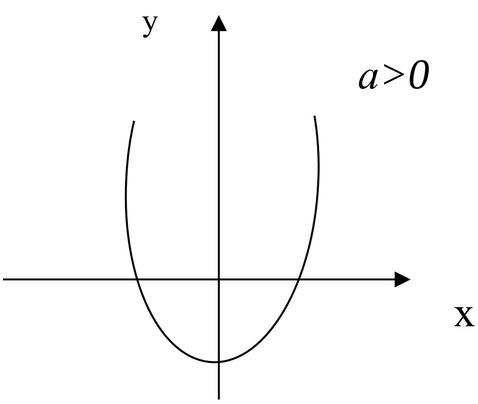


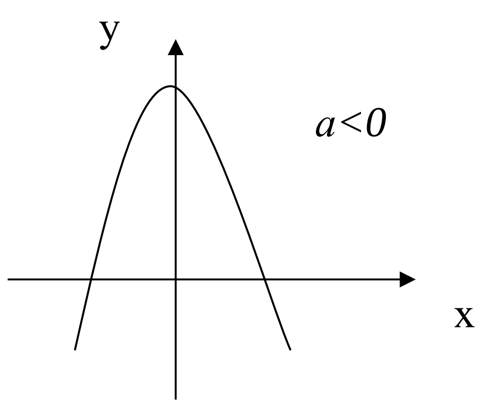
Квадратичная функция $y = ax^2 + вx + c$

График – парабола с вершиной в точке (x;y), где

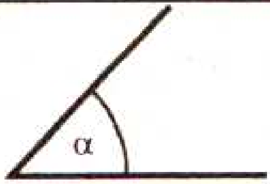
$x = -\frac{в}{2a}$; $y = \frac{4ac - в^2}{4a}$.

Ветви параболы направлены вверх при а > 0 и вниз при а < 0.



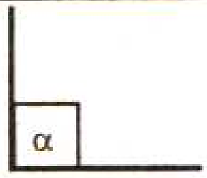


Геометрия.
Виды углов.



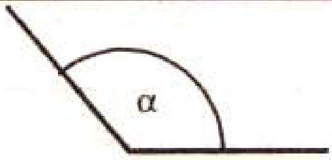
Острый угол

$0° < \alpha < 90°$.



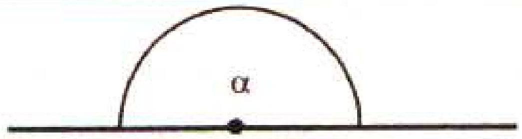
Прямой угол

$\alpha = 90°$.



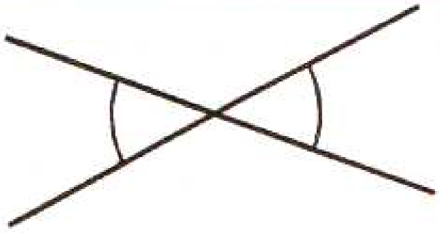
Тупой угол

$90° < \alpha < 180°$.

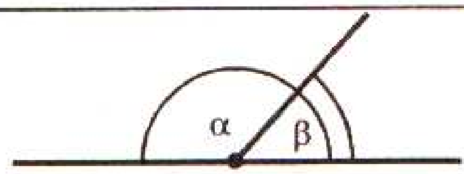


Развернутый угол

$\alpha = 180°$.



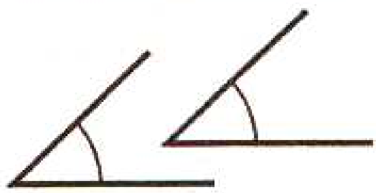
Вертикальные углы равны.



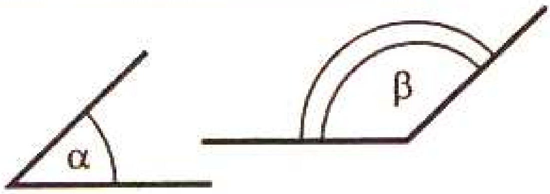
Смежные углы составляют в сумме 180°:

$\alpha + \beta = 180°$.

УГЛЫ С СООТВЕТСТВЕННО ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ СТОРОНАМИ

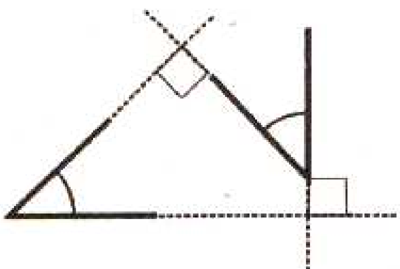


Либо равны,

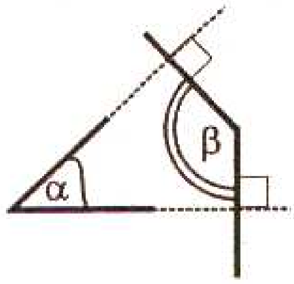


либо составляют в сумме 180°.

УГЛЫ С СООТВЕТСТВЕННО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫМИ СТОРОНАМИ



Либо равны,

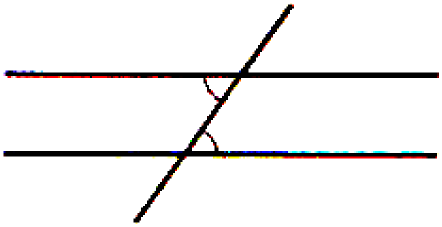


либо составляют в сумме 180°.

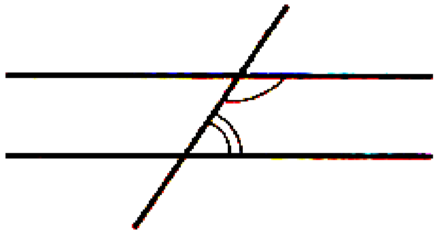
Параллельные прямые.

Так называются прямые, которые не пересекаются.

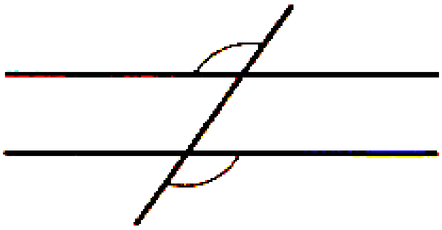
ПРИЗНАКИ И СВОЙСТВА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРЯМЫХ



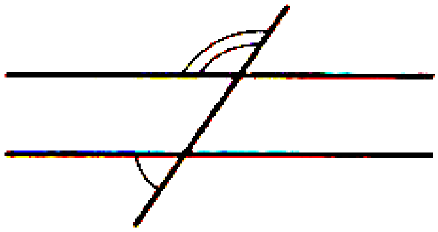
Внутренние накрест лежащие углы равны.



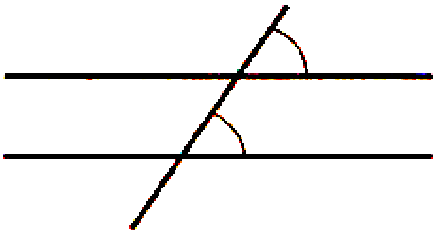
Сумма внутренних односторонних углов равна 180°.



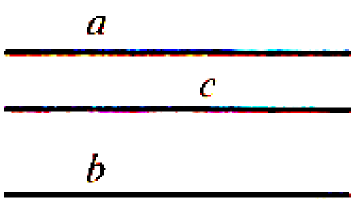
Внешние накрест лежащие углы равны.



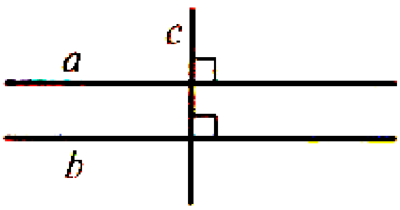
Сумма внешних односторонних углов равна 180°.



Соответственные углы равны.



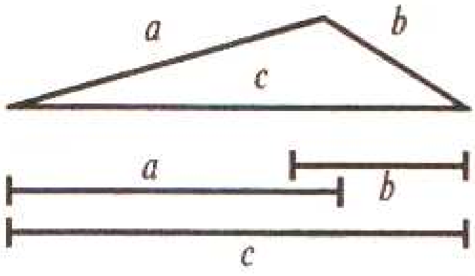
Две прямые, параллельные третьей, параллельны:
$(a \parallel c,\ b \parallel c) \Rightarrow a \parallel b$.



Две прямые, перпендикулярные третьей, параллельны:
$(a \perp c,\ b \perp c) \Rightarrow a \parallel b$.

Треугольники.
Произвольный треугольник.

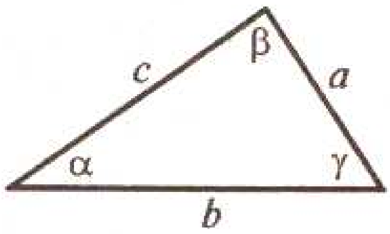
СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ



Неравенство треугольника

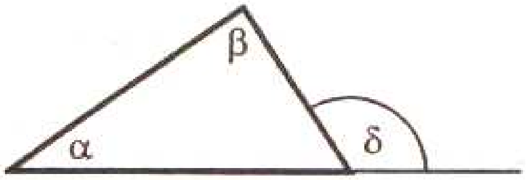
Любая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон, но больше модуля их разности:

$$|a-b| < c < a+b.$$



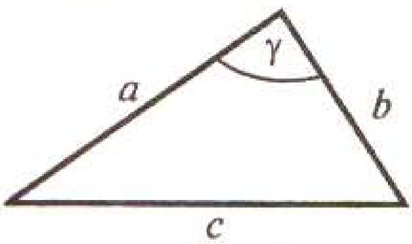
Сумма углов треугольника равна 180°: $\alpha+\beta+\gamma=180°$.

Против большей стороны в треугольнике лежит больший угол: $b > a \Leftrightarrow \beta > \alpha$



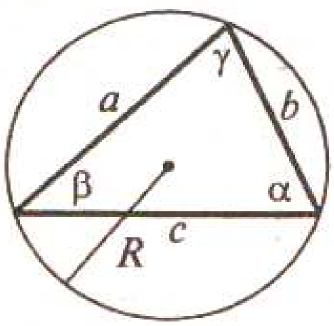
Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним:

$$\delta = \alpha + \beta.$$



Теорема косинусов:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

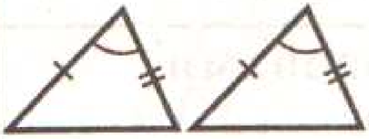


Теорема синусов:

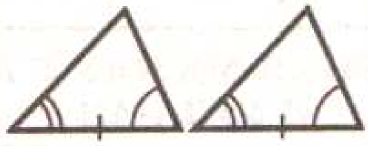
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Это отношение равно $2R$, где R – радиус описанной окружности.

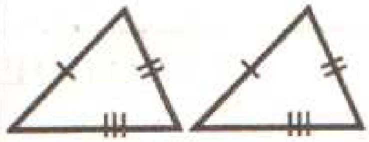
ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ



По двум сторонам и углу между ними.

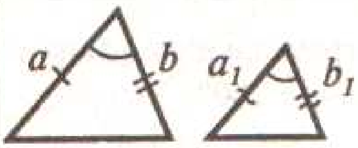


По одной стороне и двум прилежащим к ней углам.



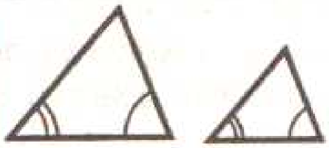
По трем сторонам.

ПРИЗНАКИ ПОДОБИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

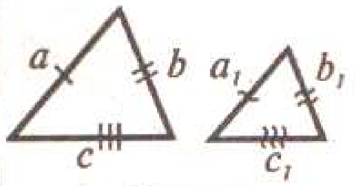


По двум пропорциональным сторонам и углу между ними:

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1}.$$



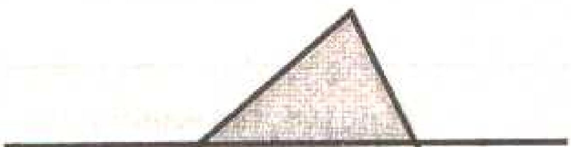
По двум равным углам.



По трем пропорциональным сторонам:

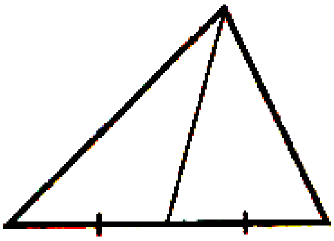
$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}.$$

СВОЙСТВО ПРЯМОЙ, ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ СТОРОНЕ ТРЕУГОЛЬНИКА

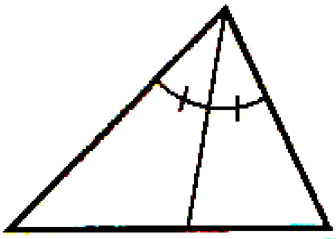


Прямая, параллельная одной из сторон треугольника и пересекающая две другие стороны треугольника, отсекает треугольник, подобный данному.

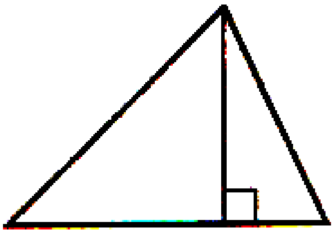
ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ЛИНИИ ТРЕУГОЛЬНИКА



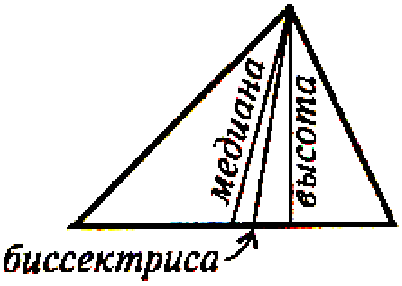
Медиана – отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противолежащей стороны.



Биссектриса – отрезок, который соединяет вершину треугольника с точкой на противолежащей стороне и делит внутренний угол пополам.



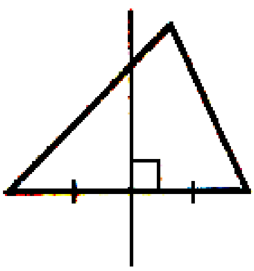
Высота – перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника на прямую, содержащую противолежащую сторону треугольника.



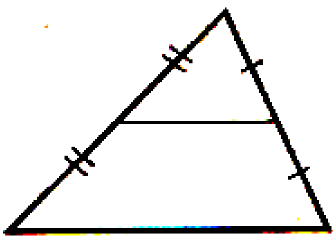
Взаимное расположение медианы, биссектрисы и высоты

Биссектриса лежит внутри угла, образованного высотой и медианой, проведенными из той же вершины.

В равнобедренном треугольнике медиана, биссектриса и высота, проведенные к основанию, совпадают.

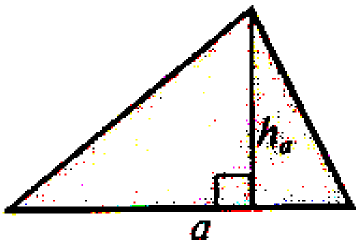


Серединный перпендикуляр – прямая, перпендикулярная стороне треугольника и делящая ее пополам.



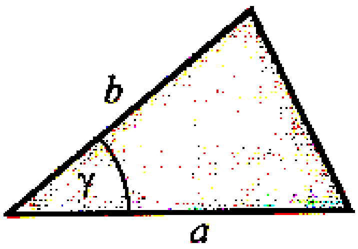
Средняя линия – отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника.

ПЛОЩАДЬ ТРЕУГОЛЬНИКА



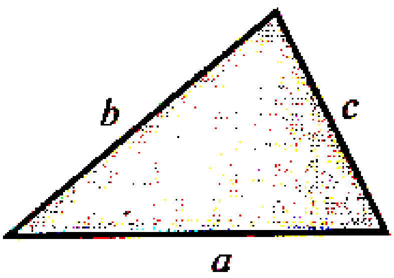
Через сторону и высоту, проведенную к ней:

$$S = \frac{1}{2} a h_a .$$



Через две стороны и угол между ними:

$$S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma .$$

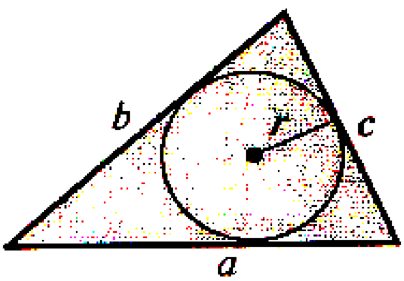


Формула Герона

Через три стороны:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} ,$$

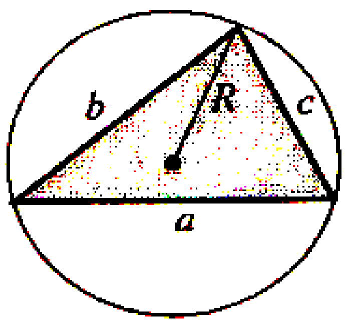
где $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.



Через полупериметр и радиус вписанной окружности:

$$S = pr,$$

где $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.



Через произведение сторон и радиус описанной окружности:

$$S = \frac{abc}{4R} .$$

Равнобедренный треугольник.

Опр: Так называется треугольник, у которого две стороны равны. Равные стороны называют боковыми сторонами, а третья сторона - основанием.

Свойства и признаки:

1) углы при основании равны;
2) высота, проведённая к основанию, является медианой и биссектрисой.

Равносторонний (правильный) треугольник.

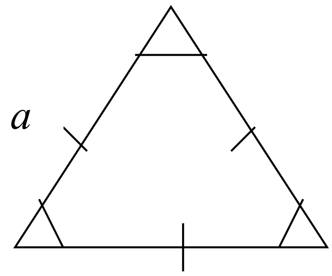
Опр: Так называется треугольник у которого три стороны равны.

Свойства и признаки:

1) все углы равны;
2) каждая медиана совпадает с биссектрисой и высотой;
3) центры вписанной и описанной окружностей совпадают.

Их радиусы равны: $r = \dfrac{a}{2\sqrt{3}}$; $R = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$; $R = 2r$.

Высота и площадь: $h = \dfrac{\sqrt{3}a}{2}$; $S = \dfrac{\sqrt{3}a^2}{4} = 3\sqrt{3}r^2 = \dfrac{3\sqrt{3}R^2}{4}$.



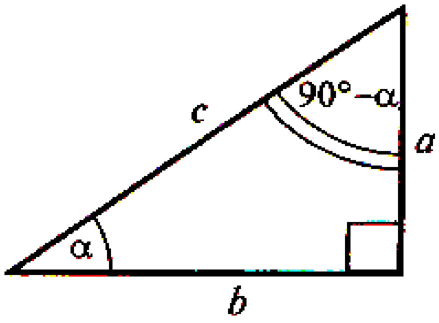
Прямоугольный треугольник.

Опр: Так называется треугольник, у которого один угол прямой. Стороны, прилежащие к прямому углу, называются катетами, а сторона, противолежащая прямому углу – гипотенузой.

Теорема Пифагора: Квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов. $c^2 = a^2 + в^2$; $c = \sqrt{a^2 + в^2}$ - гипотенуза;

$a = \sqrt{c^2 - в^2}$ - катет; $в = \sqrt{c^2 - a^2}$ - катет.

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ



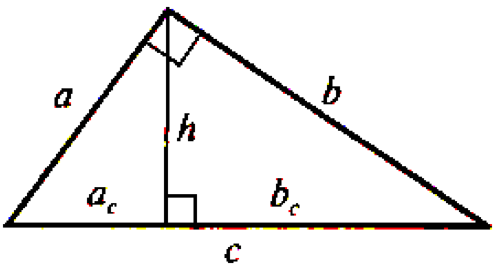
$$\frac{a}{c} = \sin\alpha = \cos(90°-\alpha)$$

$$\frac{b}{c} = \cos\alpha = \sin(90°-\alpha)$$

$$\frac{a}{b} = \mathrm{tg}\alpha = \mathrm{ctg}(90°-\alpha)$$

$$\frac{b}{a} = \mathrm{ctg}\alpha = \mathrm{tg}(90°-\alpha)$$

СВОЙСТВА ПРОЕКЦИЙ КАТЕТОВ



Каждый катет является средним пропорциональным между гипотенузой и проекцией этого катета на гипотенузу:

$$\frac{a_c}{a} = \frac{a}{c} \ldots\Rightarrow a^2 = a_c c$$

$$\frac{b_c}{b} = \frac{b}{c} \Rightarrow b^2 = b_c c.$$

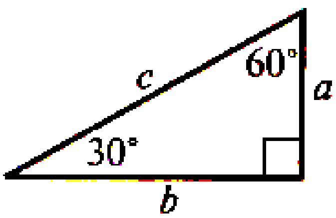
Высота, опущенная на гипотенузу, является средним пропорциональным между проекциями катетов на гипотенузу:

$$\frac{a_c}{h} = \frac{h}{b_c} \Rightarrow h^2 = a_c b_c.$$

Высота выражается через стороны и проекции катетов:

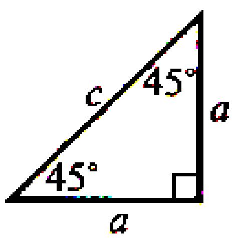
$$h = \frac{ab}{c} = \frac{ab}{a_c + b_c}.$$

ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ



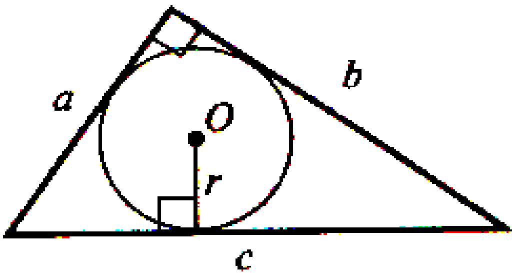
$$a = \frac{c}{2}$$

$$b = \frac{\sqrt{3}c}{2}$$



$$a = \frac{c}{\sqrt{2}}$$

ОКРУЖНОСТЬ, ВПИСАННАЯ В ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

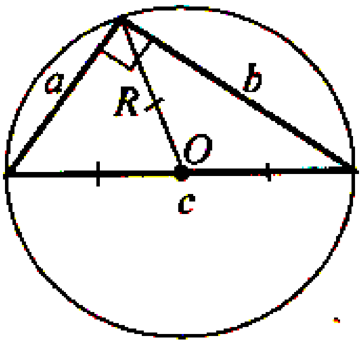


Радиус вписанной окружности:

$$r = \frac{ab}{a+b+c},$$

$$r = \frac{a+b-c}{2}.$$

ОКРУЖНОСТЬ, ОПИСАННАЯ ОКОЛО ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА



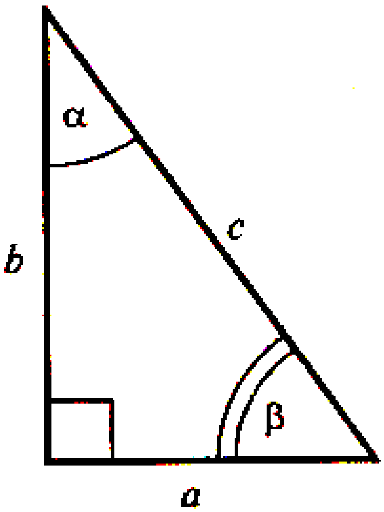
Центр описанной окружности совпадает с серединой гипотенузы, а радиус равен

— половине гипотенузы:

$$R = \frac{c}{2}$$

— медиане, проведенной к гипотенузе: $R = m_c$.

ПЛОЩАДЬ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА



Через катеты: $S = \frac{1}{2}ab$.

Через катет и острый угол:

$$S = \frac{1}{2}a^2 \operatorname{tg}\beta = \frac{1}{2}a^2 \operatorname{ctg}\alpha.$$

Через гипотенузу и любой из острых углов:

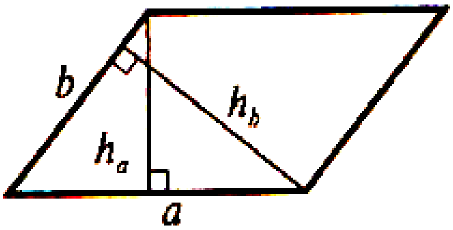
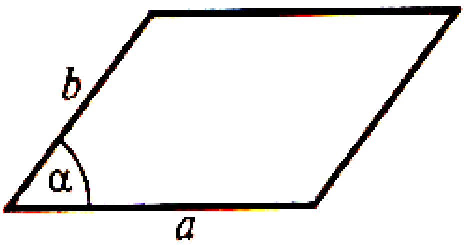
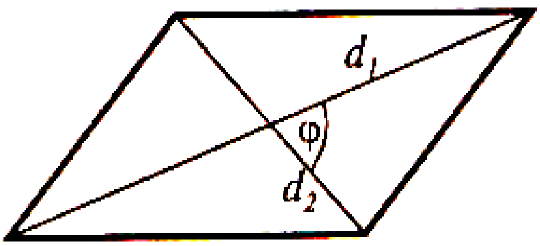
$$S = \frac{1}{4}c^2 \sin 2\alpha = \frac{1}{4}c^2 \sin 2\beta.$$

Параллелограмм.

Опр: Так называется четырёхугольник, у которого противолежащие стороны параллельны.

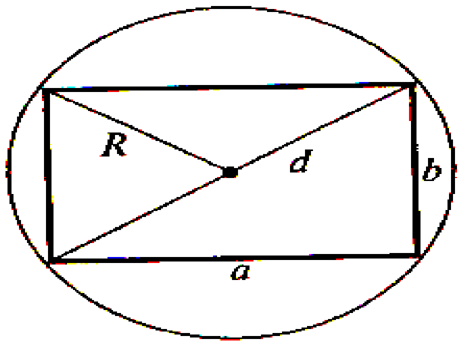
Признаки и свойства:

1) противолежащие стороны попарно равны;
2) противолежащие углы попарно равны;
3) диагонали точкой пересечения делятся пополам;
4) сумма углов, прилежащих к одной стороне равна 180^0.

	Через сторону и опущенную на нее высоту: $S = ah_a = bh_b$.
	Через две прилежащие стороны и угол между ними: $S = ab\sin\alpha$.
	Через диагонали и угол между ними: $S = \dfrac{d_1 d_2 \sin\varphi}{2}$.

Прямоугольник.

Опр: Так называется параллелограмм, у которого все углы прямые.
У прямоугольника диагонали равны и точкой пересечения делятся пополам.

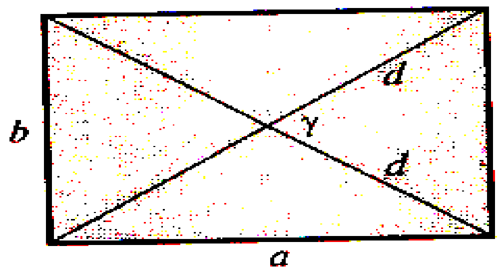


Около любого прямоугольника можно описать окружность. Радиус описанной окружности

$$R = \frac{d}{2},$$

где $d = \sqrt{a^2 + b^2}$ **— диагональ прямоугольника.**

ПЛОЩАДЬ ПРЯМОУГОЛЬНИКА



Через стороны:

$$S = ab.$$

Через диагональ и угол между диагоналями:

$$S = \frac{d^2 \sin \gamma}{2}.$$

Квадрат.

Опр: Так называется прямоугольник, у которого все стороны равны.
У квадрата диагонали равны, перпендикулярны, пересекаясь, делятся пополам.
Около квадрата можно описать окружность, радиус которой равен:

$$R = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{d}{2}$$, где d – диагональ, *a* – сторона.

В окружность можно вписать окружность, радиус которой равен:

$$r = \frac{a}{2}$$

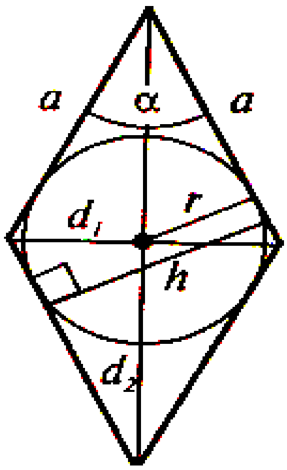
Площадь квадрата: $S = a^2 = \dfrac{d^2}{2}$

1Ромб.

Опр: Так называется параллелограмм, у которого все стороны равны.

Диагонали ромба пересекаются под прямым углом и точкой пересечения делятся пополам.

Площадь ромба.



Через сторону и высоту: $S = ah$.

Через сторону и радиус вписанной окружности: $S = 2ar$.

Через сторону и угол ромба: $S = a^2 \sin\alpha$.

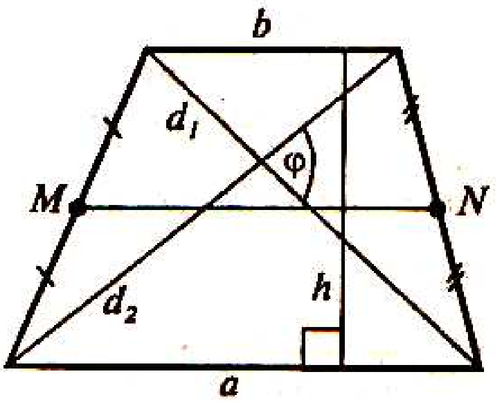
Через диагонали: $S = \dfrac{d_1 d_2}{2}$

Трапеция.

Опр: Так называется четырёхугольник, у которого две стороны (основания) параллельны, а две другие (боковые стороны) - не параллельны.

Трапеция с равными боковыми сторонами называется равнобокой (равнобедренной).

Площадь трапеции.



Через полусумму оснований и высоту:

$$S = \frac{a+b}{2}h.$$

Через среднюю линию и высоту:

$$S = MN \cdot h.$$

Через диагонали и угол между ними:

$$S = \frac{d_1 d_2 \sin\varphi}{2}.$$

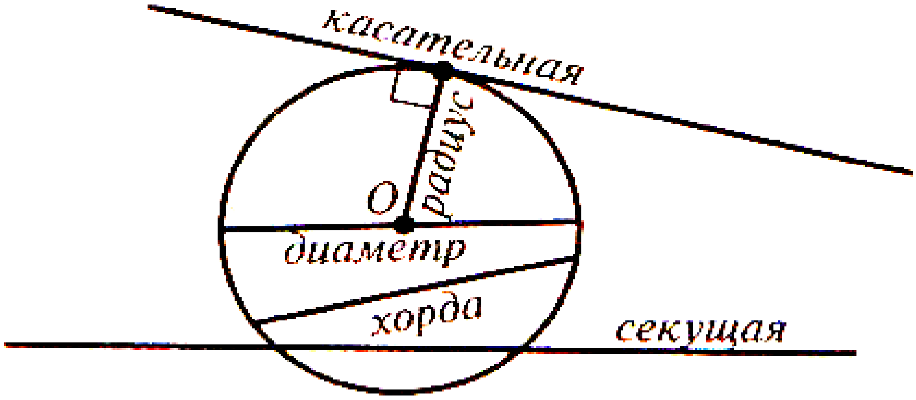
где MN – средняя линия (отрезок, соединяющий середины боковых сторон, равный полу сумме оснований).

Круг. Окружность.

Опр: Круг - это множество точек плоскости удалённых от данной точки

(центра) на расстояние не большее данного (радиуса).

Опр: Окружность – это множество точек плоскости удалённых от данной точки (центра) на расстояние равное данному (радиусу).



Площадь круга: $S = \pi R^2 = \dfrac{\pi D^2}{4}$

Длина окружности: $\ell = 2\pi R = \pi D$

Таблица значений тригонометрических функций.

α	0 (0°)	$\frac{\pi}{6}$ (30°)	$\frac{\pi}{4}$ (45°)	$\frac{\pi}{3}$ (60°)	$\frac{\pi}{2}$ (90°)	π (180°)	$\frac{3\pi}{2}$ (270°)	2π (360°)
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tg α	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-	0
ctg α	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	-	0	-

Тренажёр №1
Решить линейное уравнение.

Вариант1	Вариант2
1) 2x – 4 = 0 2) 3 – 9x = 0 3) 6x – 4 = 4x – 8 4) 4 – 4x = 6 – 3x 5) 4x – (2x +5) = 0 6) 3x + (6 -4x) =0 7) 5 – (5x + 7) = 2 + (5 – 3x) 8) 2x -5(x + 4) = 0 9) 3 – 2(9 – 4x) = 10 10) 6x + 2(2x + 3) = 3x – 9	1) 12x – 4 = 0 2) 3 – 18x = 0 3) 13 6x – 40 = 2x – 8 4) 14 – 4x = 62 – 4x 5) 4x – (x +6) = 0 6) 3x + (6 - 2x) =0 7) 5 – (2x + 7) = 2 + (15 – 3x) 8) 22x -5(4x + 4) = 0 9) 3 x– 2(9 – 4x) = 14 10) 6x - 2(2x + 23) = 3x – 19
Вариант 3 1) 4x – 4 = 0 2) 36– 9x = 0 3) x – 4 = 4x + 8 4) 45 – 4x = 9 – 13x 5) 4x – (6x +20) = 0 6) 5x + (60 - 3x) =0 7) 5 – (15x + 7) = 20 + (5 – 13x) 8) 2x -5(2x + 4) = 4 9) 30 – 2(2 – 4x) = 10 10) 6x + 2(2x - 3) = 5x – 9	**Вариант 4** 1) 6x – 4 = 0 2) 3 – 2x = 0 3) 6x – 9 = x – 14 4) 14 – 5x = 7 + 9x 5) 4x – (8x +16) = 0 6) 20x + (36 - 5x) =0 7) 56– (5x + 7) = 2 + (45 – 3x) 8) 2x - 2(4x + 4) = 0 9) x – 2(3– 4x) = 15 10) 7x - 2(2x + 23) = 2x – 19

Тренажёр № 2.

Решить линейное неравенство.

Вариант 1	Вариант 2
1) $x - 4 > 0$ 2) $3 - 9x \le 0$ 3) $6x - 4 > 4x - 8$ 4) $4 - 4x \ge 6 - 3x$ 5) $4x - (2x + 5) < 0$ 6) $3x + (6 - 4x) \le 0$ 7) $5 - (5x + 7) > 2 + (5 - 3x)$ 8) $2x - 5(x + 4) \ge 0$ 9) $3 - 2(9 - 4x) < 10$ 10) $6x + 2(2x + 3) \le 3x - 9$	1) $12x - 4 > 0$ 2) $3 - 18x \le 0$ 3) $6x - 40 < 2x - 8$ 4) $14 - 4x \ge 62 - 4x$ 5) $4x - (x + 6) > 0$ 6) $3x + (6 - 2x) \le 0$ 7) $5 - (2x + 7) < 2 + (15 - 3x)$ 8) $22x - 5(4x + 4) \ge 0$ 9) $3x - 2(9 - 4x) > 14$ 10) $6x - 2(2x + 23) \le 3x - 19$
Вариант 3	**Вариант 4**
1) $4x - 4 \le 0$ 2) $36 - 9x > 0$ 3) $x - 4 \ge 4x + 8$ 4) $45 - 4x < 9 - 13x$ 5) $4x - (6x + 20) \le 0$ 6) $5x + (60 - 3x) > 0$ 7) $5 - (15x + 7) \ge 20 + (5 - 13x)$ 8) $2x - 5(2x + 4) > 4$ 9) $30 - 2(2 - 4x) \le 10$ 10) $6x + 2(2x - 3) < 5x - 9$	1) $6x - 4 \le 0$ 2) $3 - 2x < 0$ 3) $6x - 9 > x - 14$ 4) $14 - 5x \ge 7 + 9x$ 5) $4x - (8x + 16) < 0$ 6) $x + (36 - 5x) \ge 0$ 7) $56 - (5x + 7) > 2 + (45 - 3x)$ 8) $2x - 2(4x + 4) \le 0$ 9) $x - 2(3 - 4x) > 15$ 10) $7x - 2(2x + 23) \ge 2x - 19$

Тренажёр № 3.
Формулы сокращённого умножения.

Вариант 1	**Вариант 2**
1) $x^2 - 4 =$ 2) $16 - x^2 =$ 3) $9x^2 - 1 =$ 4) $(x - 2)(x + 2) =$ 5) $(2x - 3)(2x + 3) =$ 6) $(4 - x)^2 =$ 7) $(2x + 3)^2 =$ 8) $(x - 5)^2 =$ 9) $x^2 - 2x + 1 =$ 10) $4x^2 + 8x + 4 =$	1) $x^2 - 16 =$ 2) $25 - x^2 =$ 3) $9x^2 - 9 =$ 4) $(x - 3)(x + 3) =$ 1) $(3x - 1)(3x + 1) =$ 2) $(5 - x)^2 =$ 3) $(4x + 2)^2 =$ 4) $(x - 3)^2 =$ 5) $x^2 - 4x + 4 =$ 6) $4x^2 + 4x + 1 =$
Вариант 3	**Вариант 4**
1) $x^2 - 25 =$ 2) $49 - x^2 =$ 3) $4x^2 - 1 =$ 4) $(x - 4)(x + 4) =$ 5) $(2x - 5)(2x + 5) =$ 6) $(3 - x)^2 =$ 7) $(4x + 3)^2 =$ 8) $(x - 8)^2 =$ 9) $x^2 - 6x + 9 =$ 10) $4x^2 + 16x + 16 =$	1) $x^2 - 36 =$ 2) $81 - x^2 =$ 3) $16x^2 - 1 =$ 4) $(x - 6)(x + 6) =$ 5) $(2x - 4)(2x + 4) =$ 6) $(2 - x)^2 =$ 7) $(3x + 2)^2 =$ 8) $(x - 6)^2 =$ 9) $x^2 - 8x + 16=$ 10) $9x^2 + 6x + 1 =$

Тренажёр №4.
Решение неполных квадратных уравнений.

Вариант 1.	Вариант 2.
1) $2x^2 = 0$	1) $6x^2 = 0$
2) $1/4\, x^2 = 0$	2) $1/8\, x^2 = 0$
3) $4x^2 - 4 = 0$	3) $8x^2 - 8 = 0$
4) $3x^2 - 27 = 0$	4) $4x^2 - 16 = 0$
5) $9x^2 - 1 = 0$	5) $4x^2 - 1 = 0$
6) $16x^2 - 4 = 0$	6) $12x^2 - 3 = 0$
7) $x^2 - 5x = 0$	7) $x^2 - 3x = 0$
8) $4x^2 + 2x = 0$	8) $5x^2 + 10x = 0$
9) $2x^2 - 14x = 0$	9) $2x^2 - 8x = 0$
10) $4 - 36x^2 = 0$	10) $27 - 3x^2 = 0$
Вариант 3.	**Вариант 4.**
1) $4x^2 = 0$	1) $7x^2 = 0$
2) $1/5\, x^2 = 0$	2) $1/9\, x^2 = 0$
3) $7x^2 - 7 = 0$	3) $3x^2 - 3 = 0$
4) $2x^2 - 32 = 0$	4) $4x^2 - 36 = 0$
5) $16x^2 - 1 = 0$	5) $36x^2 - 1 = 0$
6) $36x^2 - 4 = 0$	6) $81x^2 - 9 = 0$
7) $x^2 - 12x = 0$	7) $x^2 - 8x = 0$
8) $3x^2 + 6x = 0$	8) $6x^2 + 12x = 0$
9) $5x^2 - 15x = 0$	9) $4x^2 - 20$ õ $= 0$
10) $6 - 54x^2 = 0$	10) $63 - 7$ õ$^2 = 0$

Тренажёр №5.
Решить квадратное уравнение.

Вариант 1. 1) $2x^2 + 3x - 5 = 0$ 2) $5x^2 - 7\tilde{o} + 2 = 0$ 3) $5\tilde{o}^2 - 3x - 2 = 0$ 4) $x^2 + 3x + 1 = 0$ 5) $-x^2 + 7x + 8 = 0$ 6) $x^2 - 4x + 4 = 0$ 7) $x^2 - 2x + 6 = 0$ 8) $3x^2 + 5x - 2 = 0$ 9) $x^2 - 6x = 4x - 25$ 10) $x(x+2) = 3$	**Вариант 2.** 1) $3x^2 + 2x - 5 = 0$ 2) $2x^2 - 7x + 3 = 0$ 3) $x^2 - 5x - 1 = 0$ 4) $4x^2 + 4x + 1 = 0$ 5) $-x^2 - 2x + 15 = 0$ 6) $x^2 - 6x + 9 = 0$ 7) $x^2 - x + 4 = 0$ 8) $6x^2 + x - 1 = 0$ 9) $x^2 + 2x = 16x - 49$ 10) $x(x+3) = 4$
Вариант 3. 1) $6x^2 + x - 1 = 0$ 2) $2x^2 - 5x + 3 = 0$ 3) $5x^2 - 8x - 4 = 0$ 4) $7x^2 + 9x + 2 = 0$ 5) $-x^2 - 3x + 1 = 0$ 6) $x^2 + 4x + 4 = 0$ 7) $x^2 - 3x + 6 = 0$ 8) $3x^2 + 7x - 6 = 0$ 9) $3x^2 + 9 = 12x - x^2$ 10) $x(x-5) = -4$	**Вариант4.** 1) $2x^2 + 3x - 2 = 0$ 2) $9x^2 - 6x + 1 = 0$ 3) $3x^2 - 8x - 3 = 0$ 4) $2x^2 + 7x + 3 = 0$ 5) $-x^2 - 3x - 1 = 0$ 6) $x^2 + 6x + 9 = 0$ 7) $x^2 - 4x + 5 = 0$ 8) $5x^2 - 8x + 3 = 0$ 9) $5x^2 + 1 = 6x - 4x^2$ 10) $x(x-4) = -3$

Тренажёр № 6.
Решить квадратные неравенства.

Вариант 1. 1) $2x^2 + 3x - 5 > 0$ 2) $5x^2 - 7x + 2 < 0$ 3) $5x^2 - 3x - 2 > 0$ 4) $-x^2 + 7x + 8 < 0$ 5) $x^2 - 4x + 4 \le 0$ 6) $3x^2 + 5x - 2 \le 0$ 7) $x^2 - 6x > 4x - 25$ 8) $x(x+2) < 3$ 9) $x^2 - 12x < 0$ 10) $16x^2 - 4 > 0$	**Вариант 2.** 1) $3x^2 + 2x - 5 > 0$ 2) $2x^2 - 7x + 3 \ge 0$ 3) $x^2 - 5x - 1 < 0$ 4) $x^2 - 6x + 9 \le 0$ 5) $x^2 - x + 4 < 0$ 6) $6x^2 + x - 1 \le 0$ 7) $x^2 + 2x < 16x - 49$ 8) $x(x+3) \ge 4$ 9) $12x^2 - 3 < 0$ 10) $x^2 - 3x > 0$
Вариант 3. 1) $6x^2 + x - 1 > 0$ 2) $2x^2 - 5x + 3 \ge 0$ 3) $5x^2 - 8x - 4 > 0$ 4) $7x^2 + 9x + 2 \le 0$ 5) $-x^2 - 3x + 1 < 0$ 6) $3x^2 + 7x - 6 \ge 0$ 7) $3x^2 + 9 < 12x - x^2$ 8) $x(x-5) \le -4$ 9) $36x^2 - 4 < 0$ 10) $x^2 - 12x > 0$	**Вариант 4.** 1) $2x^2 + 3x - 2 > 0$ 2) $9x^2 - 6x + 1 \le 0$ 3) $3x^2 - 8x - 3 < 0$ 4) $-x^2 - 3x - 1 > 0$ 5) $x^2 + 6x + 9 \ge 0$ 6) $x^2 - 4x + 5 < 0$ 7) $5x^2 + 1 > 6x - 4x^2$ 8) $x(x-4) \le -3$ 9) $81x^2 - 9 < 0$ 10) $x^2 - 8x > 0$

Тренажёр № 7.
Решить системы неравенств.

Вариант 1

1) $\begin{cases} 2x-1\le 0, \\ 15-3x\ge 0. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x-1\le 7x+2, \\ 11x+13\ge x+3. \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x\le 12+11x, \\ 5x-1\le 0. \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x-4\le 0, \\ -4x\ge x-2{,}5. \end{cases}$

5) $\begin{cases} x-1\le 2+3x, \\ 5x-7\le x+9. \end{cases}$

Вариант 2

1) $\begin{cases} 6-3x\le 0, \\ 5x-3\ge 0. \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3-6x\ge 12, \\ 6x+5\le 4. \end{cases}$

3) $\begin{cases} 1-3x\le 10, \\ 6+2x\le 6. \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x+7\le 4x-3, \\ 18+x\ge 2-x. \end{cases}$

5) $\begin{cases} 8+3x\ge 2, \\ 1-2x\ge 0. \end{cases}$

Вариант 3

1) $\begin{cases} 3x-9\le 0, \\ 15-5x\ge 0. \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x-4\le 6x+2, \\ 14x+12\ge x-1. \end{cases}$

3) $\begin{cases} 4x\le 12+2x, \\ 3x-12\le 0. \end{cases}$

4) $\begin{cases} 4x-16\le 0, \\ -2x\ge x-27. \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2x-1\le 2+3x, \\ x-7\le 3x+9. \end{cases}$

Вариант 4

1) $\begin{cases} 6-2x\le 0, \\ 5x-15\ge 0. \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3-2x\ge 13, \\ 5x+5\le 25. \end{cases}$

3) $\begin{cases} 1-4x\le 13, \\ 6+4x\le 6. \end{cases}$

4) $\begin{cases} x+12\le 4x-3, \\ 18+2x\ge 2-x. \end{cases}$

5) $\begin{cases} 8+5x\ge 28, \\ 6-2x\ge 0. \end{cases}$

Тренажёр № 8.
Решить системы уравнений.

Вариант 1	**Вариант 2**
1) $\begin{cases} x + 5y = 7 \\ 3x + 2y = -5 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x - 3y = -1 \\ x - 5y = 4 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 2x + 6y = 10 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2xy = 5 \\ 2x + y = 6 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x^2 - y = -2 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$	1) $\begin{cases} x + y = 7 \\ 5x - 7y = 11 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x - 3y = -1 \\ x - 5y = 4 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 4x - 6y = 26 \\ 5x + 3y = 1 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2xy = 1 \\ 4y - x = 1 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x^2 - 3y = 22 \\ x + y = 2 \end{cases}$
Вариант 3	**Вариант 4**
1) $\begin{cases} x - 6y = -2 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + 4y = 7 \\ x - 2y = -5 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 8x + 2y = 11 \\ 6x - 4y = 11 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} xy = 6 \\ x + y = 5 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x^2 - y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$	1) $\begin{cases} x + y = 6 \\ 5x - 2y = 9 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x - 5y = -7 \\ x - 3y = -5 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 3x + 2y = 14 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3xy = 1 \\ 6x + y = 3 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x - y = 4 \\ x^2 - y^2 = 40 \end{cases}$