ГБПОУ КК ЛТК

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

ПО МАТЕМАТИКЕ

Интегральное исчисление

Ст. Ленинградская
2018 г.

Предисловие.

Настоящее пособие написано в соответствии с программой по математике для студентов средних профессиональных учебных заведений. Оно содержит достаточное количество примеров и задач, охватывающих один раздел программы – «Интегральное исчисление».

Основное назначение данного пособия состоит в том, чтобы помочь студенту восстановить знания, полученные в школе по данной теме, и преодолеть трудности при изучении нового материала.

Это пособие поможет студенту овладеть материалом самостоятельно, так как в каждом параграфе приведены краткие теоретические сведения и приёмы решения типовых задач, а также дополнительные задания для закрепления. В конце пособия приведены примерные варианты контрольной работы.

Желаю успеха в усвоении данного раздела!

Пособие составлено преподавателем математики Савченко Т.В.

Неопределённый интеграл.

Неопределённым интегралом от функции $f(x)$ называется выражение вида $\int f(x)dx = F(x) + C$, если $F'(x) = f(x)$. Функция $F(x)$ называется *первообразной* для заданной функции $f(x)$.

Свойства:

1º. $(\int f(x)dx)' = f(x);$

2º. $d(\int f(x)dx) = f(x)dx;$

3º. $\int dF(x) = F(x) + C;$

4º. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx, a - \text{число};$

5º. $\int [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$

6º. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$ и $u = \varphi(x)$,

то $\int f(u)du = F(u) + C.$

Таблица основных интегралов.

1. $\int dx = x + C;$

2. $\int x^m dx = \dfrac{x^{m+1}}{m+1} + C$, при $m \neq 1$;

3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C;$

4. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctgx + C;$

5. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C;$

6. $\int \ell^x dx = \ell^x + C;$

7. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C;$

8. $\int \sin x dx = -\cos x + C;$

9. $\int \cos x dx = \sin x + C;$

10. $\int \sec^2 x dx = tgx + C;$

11. $\int \cos ec^2 x dx = -ctgx + C;$

12. $\int f(ax+b)dx = \dfrac{1}{a}F(ax+b) + C;$

13. $\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C;$

14. $\int \dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx = 2\sqrt{f(x)} + C;$

15. $\int \dfrac{dx}{x^2+a^2} = \dfrac{1}{a}arctg\dfrac{x}{a} + C = arctgx + C;$

16. $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C;$

17. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{2} + C;$

18. $\int \dfrac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\dfrac{x}{2}\right| + C;$

19. $\int \dfrac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| + C;$

20. $\int tgxdx = -\ln|\cos x| + C;$

21. $\int ctgxdx = \ln|\sin x| + C;$

22. $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}dx = \dfrac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a_2} \pm \dfrac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C;$

23. $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \dfrac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{x}{2} + C.$

Найти следующие интегралы:

1. $\int 5dx = 5\int dx = 5x + C$,

2. $\int 6x^2dx = 6\int x^2dx = 6\cdot\frac{x^3}{3} + C = 2x^3 + C$,

3. $$\int 4(x^2 - x + 3)dx = 4\int x^2dx - 4\int xdx + 12\int dx = 4\cdot\frac{x^3}{3} - 4\cdot\frac{x^2}{2} + 12x + C = \frac{4x^3}{3} - 2x^2 + 12x + C.$$

4. $$\int 2(3x-1)^2dx = 2\int(9x^2 - 6x + 1)dx = 2(\frac{9x^3}{3} - \frac{6x^2}{2} + x) + C = 2(3x^3 - 3x + x) + C = 6x^3 - 6x^2 + 2x + C.$$

5. $$\int\frac{dx}{3^x} = \int\left(\frac{1}{3}\right)^x dx = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^x}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)} + C = -\frac{1}{3^x\ln 3} + C ,$$

6. $$\int 2^{3x-1}dx = \int(2^{3x} \div 2)dx = \frac{1}{2}\int 8^x dx = \frac{1}{2}\frac{8^x}{\ln 8} + C ,$$

7. $$\int\frac{dx}{9x^2-1} = \int\frac{1}{9}\frac{dx}{x^2-(1/3)^2} = \frac{1}{9}\int\frac{dx}{x^2-\left(1/3\right)^2} = \frac{1}{9}\cdot\frac{3}{2}\ln\left|\frac{x-1/3}{x+1/3}\right| + C = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-1/3}{x+1/3}\right|,$$

8. $$\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+1}} = \int\frac{dx}{2\sqrt{x^2+1/4}} = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1/4}} = \frac{1}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2+1/4} + C\right| ,$$

9. $$\int\frac{dx}{4x^2+25} = \int\frac{dx}{4(x^2+(25/4))} = \frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2+\left(5/2\right)^2} = \frac{1}{10}arctg\frac{2x}{5} + C,$$

10. $$\int\frac{x^2-16}{\sqrt{x}+2}dx = \int\frac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)\left(x+4\right)}{\sqrt{x}+2}dx = \int(x^{3/2} + 4x^{1/2} - 2x - 8)dx = \frac{2}{5}x^{5/2} + \frac{8}{3}x^{3/2} - x^2 - 8x + C.$$

Вычислите интегралы:

1. $\int\left(2 - 3e^x + x\right)dx$;
2. $\int\left(3x^5 - \cos x - 1\right)dx$;
3. $\int\left(7x^6 - \sin x + 3\right)dx$;
4. $\int\left(7 - \frac{1}{2\cos^2 x} - x^2\right)dx$;
5. $\int\left(x^4 - \frac{1}{2x} - 4\right)dx$;
6. $\int\left(3 - \frac{1}{3\sin^2 x} - 5\right)dx$;
7. $\int\left(3x^2 - \frac{1}{3\sqrt{1-x^2}} + 2\right)dx$;
8. $\int\left(x - \frac{2}{1+x^2} - 5\right)dx$;
9. $\int\left(2\cos x - 5x^4 + 3\right)dx$;
10. $\int\left(5e^x - x^3 - 4\right)dx$.

Замена переменной в неопределённом интеграле производится с помощью подстановок двух видов:

1) $x = \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ - монотонная, непрерывно дифференцируемая функция новой переменной t

$$\int f(x)dx = \int f\left[\varphi(t)\right]\cdot\varphi'(t)dt ;$$

2) $u = \varphi(x)$, где u - новая переменная

$$\int f\left[\varphi(x)\right]\varphi'(x)dx = \int f(u)du .$$

Найти интегралы методом замены переменной:

1. $$\int\left(1+x^2\right)^{1/2}xdx = \frac{1}{2}\int(1+x^2)^{1/2}d(x^2+1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(1+x^2)^{3/2} + C = \frac{\sqrt[3]{(1+x)^2}}{3} + C ,$$

2.
$$\int\left(x^2-3x+1\right)^{10}(2x-3)dx=\int(x^2-3x+1)d(x^2-3x+1)=\frac{(x^2-3x+1)^{11}}{11}+C,$$

3. $\int(\ln t)^4\frac{dt}{t}=\int(\ln t)^4 d(\ln t)=\frac{(\ln t)^5}{5}+C,$

4. $\int\ell^{3\cos x}\sin xdx=\frac{1}{3}\int\ell^{3\cos x}\cdot 3\sin xdx=-\frac{1}{3}\int\ell^{3\cos x}d(3\cos x)=-\frac{1}{3}\ell^{3\cos x}+C,$

5. $\int\cos(5x-3)dx=\frac{1}{5}\int\cos(5x-3)d(5x-3)=\frac{1}{5}\sin(5x-3)+C,$

6. $\int tgxdx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int\frac{d(\cos x)}{\cos x}=-\ln|\cos x|+C,$

7. $\int\frac{5dy}{\cos^2 y}=5\int\frac{dy}{\cos^2 y}=5tgy+C,$

8. $\int\frac{x^2dx}{\cos^2 x^3}=\frac{1}{3}\int\frac{d(x^3)}{\cos^2 x^3}=\frac{1}{3}tgx^3+C,$

9. $\int\frac{xdx}{\sin^2(x^2+1)}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{\sin^2(x^2+1)}=-\frac{1}{2}ctg(x^2+1)+C,$

10.
$$\int\sin 2x\cos 2x\cos 4xdx=\frac{1}{2}\int\sin 4x\cos 4xdx=\frac{1}{4}\int\sin 8xdx=$$
$$=\frac{1}{32}\int\sin 8xd(8x)=-\frac{1}{32}\cos 8x+C,$$

11. $\int(2x+1)^{20}dx;$

Введём подстановку $2x+1=t$, тогда $x=\frac{t-1}{2}=\frac{t}{2}-\frac{1}{2}.$

Дифференцируя, имеем $dx=\frac{1}{2}dt$. Подставив в данный интеграл вместо $2x+1$ и dx их выражения, получим

$$\int(2x+1)^{20}dx=\int t^{20}\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{21}}{21}+C=\frac{t^{21}}{42}+C=\frac{(2x+1)^{21}}{42}+C.$$

12. $\int\frac{xdx}{(x^2+1)^3};$

Полагая $x^2+1=t$, имеем $2xdx=dt$, $xdx=(1/2)dt$. Значит,

$$\int\frac{xdx}{(x^2+1)^3}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^3}=\frac{1}{2}\int t^{-3}dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{-2}}{-2}+C=-\frac{1}{4t^4}+C=-\frac{1}{4(x^2+1)^4}+C.$$

13. $\int\left(2x^3+1\right)^4x^2dx;$

Полагая $2x^3+1=t$, имеем $6x^2dx=dt$, $x^2dx=(1/6)dt$. Значит,

$$\int\left(2x^3+1\right)^4x^2dx=\frac{1}{6}\int t^4dt=\frac{1}{6}\cdot\frac{t^5}{5}+C=\frac{t^5}{30}+C=\frac{\left(2x^3+1\right)^5}{30}+C.$$

13. $\int 3^{5x^2}xdx;$

Полагая $5x^2=t$, имеем $10xdx=dt$, $xdx=(1/10)dt$. Значит,

$$\int 3^{5x^2}xdx=\frac{1}{10}\int 3^t dt=\frac{1}{10}\cdot\frac{3^t}{\ln 3}+C=\frac{3^{5x^2}}{10\ln 3}+C.$$

14. $\int x^2\cdot\sqrt{x^3+5}dx;$

Полагая $x^3+5=t^2$, имеем $3x^2dx=2tdt$, $x^2dx=\frac{2}{3}tdt$. Значит,

$$\int x^2\cdot\sqrt{x^3+5}dx=\frac{2}{3}\int t\cdot tdt=\frac{2}{3}\cdot\frac{t^3}{3}+C=\frac{2t^3}{9}+C=\frac{2\sqrt{\left(x^3+5\right)^3}}{9}+C.$$

Найдите следующие интегралы:

1. $\int\left(7-2x\right)^3dx;$
2. $\int\left(5t-1\right)^4dt;$
3. $\int\frac{dx}{\left(4-3x\right)^2};$
4. $\int\frac{dz}{\left(5z+1\right)^3};$
5. $\int\sqrt[3]{\left(3x+1\right)^2}dx;$
6. $\int\sqrt{2x+1}dx;$
7. $\int\frac{dx}{\sqrt{\left(3x-1\right)^3}};$
8. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{\left(3x-5\right)^2}};$
9. $\int\left(x^2+3\right)^5xdx;$
10. $\int 4\left(x^4-1\right)^2x^3dx;$
11. $\int\frac{6x^2dx}{\left(1-2x^3\right)^4};$
12. $\int\frac{x^3dx}{\left(5x^4+3\right)^5};$

13. $\sqrt{4x^3+1}x^2dx$;

14. $\int\sqrt{(x^4-1)^3}x^3dx$;

15. $\int\sqrt{2\sin x-1}\cos xdx$;

16. $\int\sqrt{e^x+1}e^xdx$.

Интегрирование по частям.

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

u - та функция которая при дифференцировании упрощается;

dv - та часть, интеграл которой известен или может быть найден.

Например: для $\int P(x)\cdot e^{ax}dx,$ $\int P(x)\cdot\sin axdx,$ $\int P(x)\cdot\cos axdx,$ где $P(x)$ многочлен и за u следует брать $P(x)$;

для $\int P(x)\ln dx,$ $\int P(x)\arcsin xdx,$ $\int P(x)\arccos\ xdx$

за dv следует брать $P(x)dx$.

Вычислить интегралы:

1. $\int x\cos 2xdx;$

Положим $u=x$, $d\upsilon=\cos 2xdx$; тогда $du=dx$, $\upsilon=\frac{1}{2}\sin 2x$.

Имеем $\int x\cos 2xdx=\frac{1}{2}x\sin 2x-\frac{1}{2}\int\sin 2xdx=\frac{1}{2}x\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+C$.

2. $\int\ln xdx$;

Положим $u=\ln x$, $d\upsilon=dx$; тогда $du=\frac{dx}{x}$, $\upsilon=x$.

Имеем $\int\ln xdx=\ln x\cdot x-\int x\frac{dx}{x}=x\ln x-x+C.$

3. $\int arctgxdx$;

Положим $u=arctgx$, $d\upsilon=dx$; тогда $du=\frac{dx}{1+x^2}$, $\upsilon=x$.

Имеем

$$\int arctgxdx=arctgx\cdot x-\int\frac{xdx}{1+x^2}=arctgx\cdot x-\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}=xarctgx-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$$

4. $\int x^2e^xdx$;

Положим $u=x^2$, $d\upsilon=e^xdx$; тогда $du=2xdx$, $\upsilon=e^x$.

Имеем $\int x^2e^xdx = x^2e^x-2\int e^xxdx =$

Ещё раз: $u=x$, $d\upsilon=e^xdx$; тогда $du=dx$, $\upsilon=e^x$.

Продолжим: $=x^2e^x-2(xe^x-\int e^xdx)=x^2e^x-2xe^x+2e^x+C$.

Найдите следующие интегралы:

1. $\int x\cos xdx$;
2. $\int(1-x)\sin xdx$;
3. $\int\frac{\ln x}{x^3}dx$;
4. $\int\ln^2xdx$;
5. $\int xe^xdx$;
6. $\int\frac{xdx}{\sin^2x}$;
7. $\int\arcsin xdx$;
8. $\int e^x\cos xdx$;
9. $\int e^x\sin xdx$;
10. $\int(x^3+1)\ln xdx$.

Интегрирование простейших рациональных дробей.

Основная формула: $\int\frac{xdx}{ax^2+c}=\frac{1}{2a}\ln\left|ax^2+c\right|+C_1$**, где** $a\neq 0$**.**

Найти интегралы:

1. $\int\frac{2x+1}{x^2+2x+1}dx$;

Поскольку $x^2+2x+1=(x+1)^2$, то введём переменную $t=x+1$. Тогда $dt=dx$, $x=t-1$ и

$$\int\frac{2x+1}{x^2+2x+1}dx=\int\frac{2t-1}{t^2}dt=2\int\frac{dt}{t}-\int t^{-2}dt=2\ln|t|+\frac{1}{t}+C=2\ln|x+1|+\frac{1}{x+1}+C$$

2. $\int\frac{x+1}{4x^2+4x-3}dx$;

Поскольку $4x^2+4x-3=(2x+1)^2-4$, то положим $t=2x+1$.

Тогда $x=\frac{1}{2}(t-1)$, $dx=\frac{1}{2}dt$ и

$$\int\frac{x+1}{4x^2+4x-3}dx=\frac{1}{2}\int\frac{(1/2)(t-1)+1}{t^2-1}dt=$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{t+1}{t^2-4}=\frac{1}{4}\int\frac{tdt}{t^2-4}+\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t^2-4}=$$

Для нахождения первого интеграла воспользуемся основной формулой при $a=1$, $c=-4$. Второй интеграл табличный.

Продолжим:

$$=\frac{1}{8}\ln\left|t^2-4\right|+\frac{1}{16}\left|\frac{t-2}{t+2}\right|+C=\frac{1}{8}\ln\left|4x^2+4x-3\right|+\frac{1}{16}\ln\left|\frac{2x-1}{2x+3}\right|+C.$$

Найдите интегралы рациональных функций:

1. $\int\frac{dx}{x^2+x-2}$;
2. $\int\frac{dx}{5x^2-x}$;
3. $\int\frac{2x-3}{x^2-4}dx$;
4. $\int\frac{2x+3}{x^2+3x-10}dx$.

Определённый интеграл.

Для вычисления определённого интеграла от функции $f(x)$, в том случае, когда можно найти соответствующий неопределённый интеграл $F(x)$, служит ***формула Ньютона – Лейбница:***

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a),$$

т.е. определённый интеграл равен разности значений первообразной при верхнем и нижнем пределах интегрирования.

Свойства определённого интеграла.

1. *Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла*, т.е.

$$\int_a^b \alpha f(x)dx=\alpha\int_a^b f(x)dx$$

2. *Интеграл от алгебраической суммы двух функций равен такой же сумме интегралов от этих функций*, т.е.

$$\int_a^b (f(x)\pm g(x))dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$$

3. *Если отрезок интегрирования разбит на части, то интеграл на всём отрезке равен сумме интегралов для каждой из возникших частей*, т.е. для любых a,b,c:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$$

Вычислить:

1. $\int_0^1 x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{1}{3}-\frac{0}{3}=\frac{1}{3}$.
2. $\int_1^2 2^{3x-4}dx=\left(\frac{1}{3\ln x}2^{3x-4}\right)\Big|_1^2=\frac{1}{3\ln x}\left(2^{3x-4}\right)\Big|_1^2=\frac{1}{3\ln x}\left(4-\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{6\ln 2}$.

Вычислите определённые интегралы:

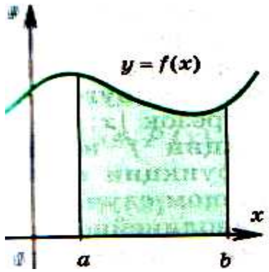
1. $\int_0^8\left(\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x}\right)dx$;
2. $\int_0^{-3}\frac{dx}{\sqrt{25+3x}}$;
3. $\int_{-1}^2(x^2+2x+1)dx$;
4. $\int_{-1}^1 e^x dx$;
5. $\int_{\pi/6}^{\pi/2}\cos xdx$;
6. $\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{dx}{\sin^2 x}$.

Приложения определённого интеграла.

Геометрические:

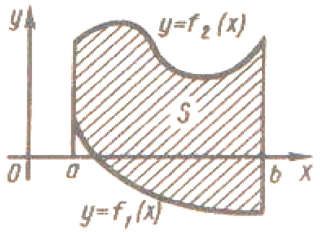
1. Если $a \le x \le b$, $f(x) \ge 0$, то

$$\int_a^b f(x)dx = S$$, где S - площадь криволинейной трапеции.



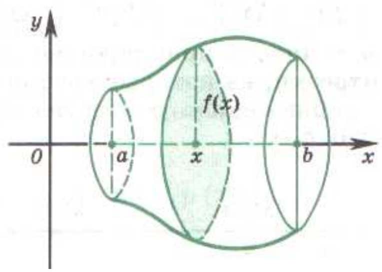
2. Площадь фигуры , ограниченная кривыми $y = f_2(x)$, $y = f_1(x)$, прямыми $x = a$ и $x = b$ вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x) \right) dx$$

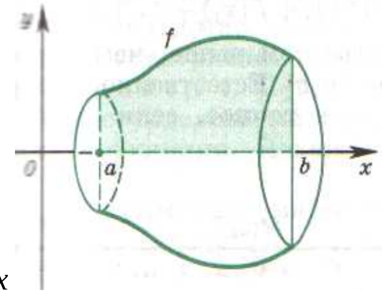


3. Если $S(x)$ площадь поперечного сечения плоскостью, перпендикулярной оси Ох, то объём тела, заключённого между плоскостями $x = a$ и $x = b$, равен

$$V = \int_a^b S(x)dx, \ (a \le b).$$



4. Объём тела вращения



$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

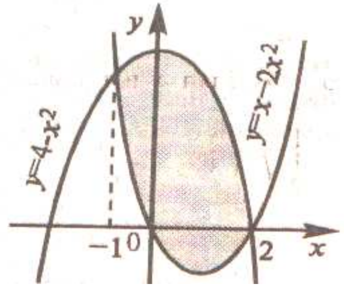
Механические:

5. Если $V(t)$ - скорость материальной точки, движущейся прямолинейно, то путь S, пройденный точкой за промежуток времени $[T_1; T_2]$, равен $S = \int_{T_1}^{T_2} V(t)dt$.

6. Если $f(x)$ - проекция силы $\vec{P}$ на ось Ох, то работа А силы $\vec{P}$ на отрезке пути $[a;b]$ равна $A = \int_a^b f(x)dx$.

Примеры решений.

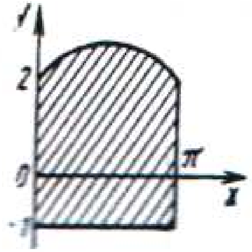
1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 4 - x^2$, $y = x^2 - 2x$



Решив систему уравнений $\begin{cases} y = 4 - x^2; \\ y = x^2 - 2x. \end{cases}$, получаем координаты точек пересечения данных кривых: $(-1;3)$ и $(2;0)$.
Искомая площадь – это площадь фигуры, заключённой между кривыми; при этом на отрезке $[-1;2]$
$f_2(x) = 4 - x^2 \ge f_1(x) = x^2 - 2x$.

Тогда имеем
$$S=\int_{-1}^{2}(4-x^2-(x^2-2x))dx=\int_{-1}^{2}(4-2x^2+2x)dx=$$
$$=\left(4x-\frac{2x^3}{3}+x^2\right)\Bigg|_{-4}^{2}=8-\frac{16}{3}+4-\left(-16+\frac{64}{3}+16\right)=9(ed.^2).$$

2. Вычислить плоской фигуры, ограниченной кривыми $y_1=\sin x+2$; $y_2=-1$; $x=0$; $x=\pi$.



Решение:
$$S=\int_0^{\pi}(y_1-y_2)dx=\int_0^{\pi}(\sin x+2+1)dx=$$
$$=(-\cos x+3x)\Big|_0^{\pi}=-\cos\pi+3\pi-(-\cos 0+3\cdot 0)=$$
$$=1+3\pi+1=3\pi+2(ed^2).$$

Вычислите площади фигур ограниченных линиями:

1) $y=x^3$; $x=0$; $y=1$.

2) $y=x^2$; $y=4x-x^2$.

3) $y=x-5-3x^2$; $y=7x-5$;

4) $y=\dfrac{5}{x}$; $y=6-x$;

5) $y=\sin x$; $y=\cos x$; $\left[\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{4}\right]$.

6) $y=e^x$; $y=0$; $x=0$; $x=-1$.

3. Вычислить объём тела, образованного вращением вокруг оси Ох кривой $y=\sqrt{4x-x^2}$, $y=0$, $x=2$ $(0\le x\le 2)$.

Решение: $V=\pi\int_0^2(4x-x^2)dx=\dfrac{16\pi}{3}(ed^2).$

Найдите объём тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной линиями:

1) $y=x^2+1$; $y=0$; $x=1$; $x=0$.

2) $y=\sqrt{x}$; $y=0$; $x=1$; $x=4$.

3) $y=1-x^2$; $y=0$.

4. Скорость движения тела изменяется по закону $V=\left(3t^2+2t+1\right)$м/с. Найти путь, пройденный точкой за 10 с от начала движения.

Решение: $S=\int_0^{10}(3t^2+2t+1)dt=\left(t^3+t^2+t\right)\Big|_0^{10}=10^3+10^2+10=1110(ed^2)$.

5. Скорость движения точки $V=(9t^2-8t)$ м/с. Найти путь, пройденный точкой за 4-ую секунду.

Решение: $S=\int_3^4(9t^2-8t)dt=\left(3t^3 4t^2\right)\Big|_3^4=83(м).$

Решите задачи:

1) Скорость движения точки $V=(6t^2+4)$ м/с. Найти путь, пройденный точкой за 5 с от начала движения.

2) Скорость движения точки $V=(t-8t^{-2})$ м/с. Найти путь, пройденный точкой за 2-ую секунду.

3) Скорость движения точки $V=(-3t^2+18t)$ м/с. Найти путь, пройденный точкой от начала движения до её остановки.

6. Сжатие x винтовой пружины пропорционально приложенной силе F. Вычислить работу силы F при сжатии пружины на 0,04 м, если для сжатия её на 0,01 м нужна сила 10 Н.

Решение:

по закону Гука $F=kx$, где F - сила, Н; x – абсолютное удлинение пружины, м; k - коэффициент пропорциональности, Н/м, имеем $10=k\cdot 0{,}01$, откуда $k=1000H/м$. Подставив в это же равенство значение k, находим $F=1000x$, т.е. $f(x)=1000x$. Искомую работу найдём при $a=0$, $b=0{,}04$:

$$A=\int_0^{0,04} 1000x\,dx = 500x^2\Big|_0^{0,04} = 0,8 \text{ (Дж)}.$$

Решите задачи:

1) Пружина в спокойном состоянии имеет длину 0,2 м. Сила в 50 Н растягивает пружину на 0,01 м. Какую работу нужно совершить, чтобы её от 0,22 до 0,32 м?

2) При сжатии пружины на 0.05 м затрачивается работа 25 Дж. Какую работу нужно совершить, чтобы сжать пружину на 0,1 м?

Примерная контрольная работа.

Вариант 1.	Вариант 2.
1.Найдите интегралы: а) $\int \frac{x^2+x\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}dx$; б) $\int\left(\frac{2}{\sqrt{9-4x^2}}+\frac{1}{e^x}\right)dx.$	1.Найдите интегралы: а) $\int \frac{-x^{-1/2}-\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}dx$; б) $\int\left(\frac{1}{\sqrt{3-x^2}}+\frac{1}{e^x}\right)dx.$
2. Скорость прямолинейного движения $V=3t^2+6t-4$. Найдите закон движения если за время t = 2 с она прошла путь 8 м.	2. Скорость прямолинейного движения $V=3t^2-2t-3$. Найдите путь, пройденный точкой за вторую секунду.
3.Вычислите интегралы: а) $\int_0^2 \frac{4x\,dx}{\sqrt{1+2x^2}}$; б) $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{3dx}{2\cos^2(x/2)}$.	3.Вычислите интегралы: а) $\int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{2}} \frac{x\,dx}{\sqrt{3x^2+1}}$; б) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x\,dx}{2+\sin x}$.
4. Найдите площади фигур ограниченных линиями: а) $y=-x^2+x+6$ и $y=0$; б) $y=x^2-8x+18$, $y=-2x+18$.	4. Найдите площади фигур ограниченных линиями: а) $y=-x^2+2x+3$ и $y=0$; б) $y=-x^2+10x-16$, $y=x+2$.
5. Вычислите работу, произведённую при сжатии пружины на 0,04 м., если для сжатия её на 0,02 м была затрачена работа 40 Дж.	5. Вычислите работу, произведённую при растяжении пружины на 0,05 м., если для растяжения её на 0,02 м нужна сила 40 Н.

Используемая литература.

1. Н.В. Богомолов «Практические занятия по математике»
Москва «Высшая школа» 2000 г.
2. Э.Н. Балаян « Репетитор по математике для поступающих в вузы».
Ростов-на-Дону «Феникс» 2003г.
3. А.Г. Мордкович «Алгебра и начала анализа 10-11 класс »
Москва 2003 г.
4. В.А.Подольский, А.М. Суходский «Сборник задач по математике»
Москва «Высшая школа» 1999г.