

ГБПОУ КК ЛТК

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

ПО МАТЕМАТИКЕ

Дифференциальное исчисление

**Ст. Ленинградская
2018г.**

Предисловие.

Настоящее пособие написано в соответствии с программой по математике для студентов средних профессиональных учебных заведений. Оно содержит достаточное количество примеров и задач, охватывающих один раздел программы - «Дифференциальное исчисление».

Основное назначение данного пособия состоит в том, чтобы помочь студенту восстановить знания, полученные в школе по данной теме, и преодолеть трудности при изучении нового материала.

Это пособие поможет студенту овладеть материалом самостоятельно, так как в каждом параграфе приведены краткие теоретические сведения и приёмы решения типовых задач, а так же дополнительные задания для закрепления. В конце пособия приведены примерные варианты контрольной работы.

Желаю успеха в усвоении данного раздела!
Пособие составлено преподавателем математики Савченко Т.В.

Производная.

Производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения Δf функции в этой точке к приращению Δx аргумента, когда последнее стремится к нулю:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Функция $f(x)$, имеющая производную в каждой точке некоторого промежутка, называется *дифференцируемой* в этом промежутке.

Дифференциал функции равен произведению её производной на дифференциал аргумента: $dy = f'(x)dx$

§1. Производные элементарных функций.

Правила дифференцирования.

Таблица производных основных элементарных функций.

$$\begin{aligned} (C)' &= 0 & (C - const); & & (x)' &= 1; \\ (x^n)' &= n \cdot x^{n-1}; & & & (\sqrt{x})' &= \frac{1}{2\sqrt{x}}; \\ \left(\frac{1}{x}\right)' &= -\frac{1}{x^2}; & & & (\sin x)' &= \cos x; \\ (\cos x)' &= -\sin x; & & & (tgx)' &= \frac{1}{\cos^2 x}; \\ (ctgx)' &= -\frac{1}{\sin^2 x}; & & & (a^x)' &= a^x \ln a; \\ (e^x)' &= e^x; & & & (\log_a x)' &= \frac{1}{x \cdot \ln a}; \\ (\ln x)' &= \frac{1}{x}; & & & (\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \\ (\arccos x)' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; & & & (arctgx)' &= \frac{1}{1+x^2}; \end{aligned}$$

$$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Основные правила дифференцирования.

$$(c \cdot u)' = c \cdot u', \quad c - const; \quad (u \pm v)' = u' \pm v';$$

$$(u \cdot v)' = u'v + v'u; \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2};$$

Пример 1. Найти производные функции $y'(x)$, если:

1) $y = 4x^3 - x^2 + 3x - 12$;

2) $y = 2\sqrt{x} - 4x^{-3} + x$;

3) $y = \frac{3}{x} - 2\ell^x + 3$;

4) $y = 3a^x - 2\log_a x + 4$;

5) $y = 4\ln x + 2\cos x - 6$;

6) $y = 2\arcsin x + 2ctgx - 5x$;

7) $y = 3\sin x - 4\arccos x - 4x$;

8) $y = (3x-1)(2x^2-4x)$;

9) $f(x) = \frac{1-2x}{1+2x^2}$;

10) $y = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$.

Решение:

1) $y' = (4x^3 - x^2 + 3x - 12)' = 12x^2 - 2x + 3$;

2) $y' = (2\sqrt{x} - 4x^{-3} + x)' = \frac{2}{2\sqrt{x}} + 12x^{-4} + 1 = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{12}{x^4} + 1$;

3) $y' = \left(\frac{3}{x} - 2\ell^x + 3\right)' = -\frac{3}{x^2} - 2\ell^x$;

4) $y' = (3a^x - 2\log_a x + 4)' = 3a^x \ln a - \frac{2}{x \cdot \ln a}$;

5) $y' = (4\ln x + 2\cos x - 6)' = \frac{4}{\ln x} - 2\sin x$;

6) $y' = (2\arcsin x + 2ctgx - 5x)' = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{2}{\sin^2 x} - 5$;

7) $y' = (3\sin x - 4\arccos x - 4x)' = 3\cos x + \frac{4}{\sqrt{1-x^2}} - 4$;

8)

$$y' = ((3x-1)(2x^2-4x))' = (3x-1)'(2x^2-4x) + (2x^2-4x)'(3x-1) = 3(2x^2-4x) + (4x-4)(3x-1) = 6x^2 - 12x + 12x^2 - 4x - 12x + 4 = 18x^2 - 28x + 4;$$

$$9) \quad y' = \left(\frac{1-2x}{1+2x^2} \right)' = \frac{(1-2x)'(1+2x^2) - (1+2x^2)'(1-2x)}{(1+2x^2)^2} = \frac{-2(1+2x^2) - 4x(1-2x)}{(1+2x^2)^2} = \frac{-2-4x^2-4x+8x^2}{(1+2x^2)^2} = \frac{4x^2-4x-2}{(1+2x^2)^2};$$

$$10) \quad y' = \left(\frac{\sqrt{x}}{x-1} \right)' = \frac{(\sqrt{x})'(x-1) - (x-1)'\sqrt{x}}{(x-1)^2} = \frac{\frac{x-1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}}{(x-1)^2} = \frac{\frac{x-1-2x}{2\sqrt{x}}}{(x-1)^2} = \frac{-x-1}{2\sqrt{x}(x-1)^2}.$$

Найти производные функций:

№1. $y = 2x^3 - 4x^2 + x - 9;$

№2. $y = 2\sqrt{x} - 4e^x - 2\cos x;$

№3. $y = 4\sqrt{x} + \frac{2}{x} - 2ctgx;$

№4. $y = 4\sin x - 3\ln x - 2\sin x;$

№5. $y = \sqrt{x}(2x-4);$

№6. $y = (x^3+1)\sqrt{x};$

№7. $y = \sqrt{x} \cos x;$

№8. $y = x^4(\cos x - \ell);$

№9. $y = \frac{x^3}{2x+4};$

№10. $y = \frac{x^2}{3-4x};$

№11. $y = \frac{3\sqrt{x}}{2x-9};$

№12. $y = \frac{-2\sqrt{x}}{8-3x}.$

§ 2. Производные сложных функций.

$$y = f(g(x)), \quad y' = f'_u(u) \cdot g'_x(x) \quad \text{где } u = g(x).$$

$$(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'; \quad (\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u';$$

$$\left(\frac{1}{u} \right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u';$$

$$(e^u)' = e^u \cdot u';$$

$$(a^u)' = a^u \ln a \cdot u';$$

$$(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u';$$

$$(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u';$$

$$(\sin u)' = \cos u \cdot u';$$

$$(\cos u)' = -\sin u \cdot u';$$

$$(tgu)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u';$$

$$(ctgu)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u';$$

$$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u';$$

$$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u';$$

$$(\arctgu)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u';$$

$$(\text{arcctgu})' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'.$$

Пример 2. Найдите значение производной функции в точке x_0 , если:

1) $f(x) = (2x^2 - 4)^6 \quad x_0 = -1$

$$f'(x) = 6(2x^2 - 4)^5 (2x^2 - 4)' = 6(2x^2 - 4)^5 \cdot 4x = 24x(2x^2 - 4)^5$$

$$f'(-1) = 24(-1)(2(-1)^2 - 4)^5 = -24 \cdot (-32) = 768$$

2) $f(x) = 2\cos^2 x - 1 \quad x_0 = \frac{\pi}{2}$

$$f'(x) = 4\cos x \cdot (\cos x)' = -4\cos x \cdot \sin x$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -4\cos \frac{\pi}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{2} = -4 \cdot 0 \cdot 1 = 0$$

Пример 3. Найти производную сложной функции.

1) $f(x) = 4\sin^5 x$

$$f'(x) = 20\sin^4 x \cdot (\sin x)' = 20\sin^4 x \cdot \cos x$$

2) $f(x) = 5tg^4 x$

$$f'(x) = 20tg^3 x \cdot (tgx)' = 20tg^3 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{20tg^3 x}{\cos^2 x}$$

$$3) f(x) = 4\sqrt{2x^3 - 1}$$

$$f'(x) = \frac{4}{2\sqrt{2x^3 - 1}} \cdot (2x^3 - 1)' = \frac{2 \cdot 6x^2}{\sqrt{2x^3 - 1}} = \frac{12x^2}{\sqrt{2x^3 - 1}}$$

$$4) f(x) = \frac{4}{x^3 - 4x}$$

$$f'(x) = -\frac{4}{(x^3 - 4x)^2} \cdot (x^3 - 4x)' = -\frac{4(3x^2 - 4)}{(x^3 - 4x)^2}$$

$$5) f(x) = 4^{3x-2}$$

$$f'(x) = 4^{3x-2} \cdot \ln 4 \cdot (3x-2)' = 3 \cdot 4^{3x-2} \cdot \ln 4$$

$$6) f(x) = 4\ell^{x^2-6x}$$

$$f'(x) = 4\ell^{x^2-6x} \cdot (x^2 - 6x)' = 4(2x - 6) \cdot \ell^{x^2-6x} = (8x - 24) \cdot \ell^{x^2-6x}$$

$$7) f(x) = \log_4(x^2 - x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{(x^2 - x) \cdot \ln 4} \cdot (x^2 - x)' = \frac{2x - 1}{(x^2 - x) \ln 4}$$

$$8) f(x) = 2\sin(x^2 - 4)$$

$$f'(x) = 2\cos(x^2 - 4) \cdot (x^2 - 4)' = 2\cos(x^2 - 4) \cdot 2x = 4x\cos(x^2 - 4)$$

$$9) f(x) = 4\cos(x^3 - x)$$

$$f'(x) = -4\sin(x^3 - x) \cdot (x^3 - x)' = -4\sin(x^3 - x)(3x^2 - 1)$$

$$10) f(x) = 2\operatorname{tg}x^2$$

$$f'(x) = \frac{2}{\cos^2 x^2} \cdot (x^2)' = \frac{4x}{\cos^2 x^2}$$

$$11) f(x) = 3\operatorname{ctg}(4x^2 - 2x)$$

$$f'(x) = \frac{-3}{\sin^2(4x^2 - 2x)} \cdot (4x^2 - 2x)' = \frac{-3(8x - 2)}{\sin^2(4x^2 - 2x)} = \frac{6 - 24x}{\sin^2(4x^2 - 2x)}$$

$$*12) f(x) = 2\cos^4(x^2 - 4)$$

$$f'(x) = -8\cos^3(x^2 - 4) \cdot (\cos(x^2 - 4))' = -8\cos^3(x^2 - 4) \cdot (-\sin(x^2 - 4) \cdot (x^2 - 4)') = \\ = 8\cos^3(x^2 - 4) \cdot \sin(x^2 - 4) \cdot 2x = 16x \cdot \cos^3(x^2 - 4) \cdot \sin(x^2 - 4)$$

$$*13) f(x) = 2\ell^{\sqrt{x^2-4}}$$

$$f'(x) = 2\ell^{\sqrt{x^2-4}} \cdot (\sqrt{x^2-4})' = 2\ell^{\sqrt{x^2-4}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2-4}} \cdot (x^2-4)' = \frac{2x \cdot \ell^{\sqrt{x^2-4}}}{\sqrt{x^2-4}}$$

Найти производные сложных функций:

$$\text{№1. } y = (4x - 9)^7;$$

$$\text{№2. } y = (5x + 1)^9;$$

$$\text{№3. } y = \left(\frac{x}{3} + 2\right)^{12};$$

$$\text{№4. } y = \left(\frac{x}{4} - 3\right)^{14};$$

$$\text{№5. } y = 2\cos^4 x - 4x^2;$$

$$\text{№6. } y = 2\sin^5 x + \ell;$$

$$\text{№7. } y = \ell^{4x-2};$$

$$\text{№8. } y = 3\ell^{x^2-4x};$$

$$\text{№9. } y = \frac{2}{x^2 - 4};$$

$$\text{№10. } y = \frac{5}{2-4x} + 2\cos^2 x;$$

$$\text{№11. } y = \sin(3x - 9);$$

$$\text{№12. } y = 2\sin\left(\frac{x}{2} + 1\right);$$

$$\text{№13. } y = \cos(5x + 9);$$

$$\text{№14. } y = 4\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right);$$

$$\text{№15. } y = \operatorname{tg}\left(5x - \frac{\pi}{4}\right);$$

$$\text{№16. } y = 2\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6} - 5x\right);$$

$$\text{№17. } y = \sqrt{15 - 7x};$$

$$\text{№18. } y = 4\sqrt{4 + 0,5x};$$

$$\text{№19. } y = 2\ln(x^2 - 4x);$$

$$\text{№20. } y = 4\ln(4 - 4x^2).$$

$$\text{№21. } y = 2\cos^4(2x - 4) + \ell^{2x};$$

$$\text{№22. } y = 2\ell^{\sqrt{2x}}.$$

§ 3. Производные высших порядков.

Производная второго порядка (вторая производная) от функции $y = f(x)$ есть производная от её первой производной:

$$y'' = (f'(x))'.$$

Производная третьего порядка (третья производная) от функции $y = f(x)$ есть производная от её второй производной:

$$y''' = (f''(x))'.$$

Производная n -ого порядка (n -я производная) от функции $y = f(x)$ есть производная от её $(n - 1)$ производной:

$$y^n = (f^{(n-1)}(x))'$$

Пример 4. Найти третью производную от функции $y = x \ln 2x$ в точке $x = 2$.

Решение:

$$y' = \ln 2x + x \cdot \frac{2}{2x} = \ln 2x + 1;$$

$$y'' = (y')' = (\ln 2x + 1)' = (\ln 2 + \ln x + 1)' = \frac{1}{x};$$

$$y''' = (y'')' = -\frac{1}{x^2}.$$

При $x = 2$ имеем $y'''(2) = -\frac{1}{4}$.

Найти производные второго порядка от указанных функций:

№1. $y = 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 - x;$

№2. $y = (2x + 5)^3;$

№3. $y = \frac{1}{x-1};$

№4. $y = \cos^2 x;$

№5. $y = e^{-x^2};$

№6. $y = 5^{\sqrt{x}};$

№7. $y = \arctg 3x;$

№8. $y = x \sin 2x;$

№9. $y = \ln t g x;$

№10. $y = e^x \cos x.$

№11. Дана функция $f(x) = \sin 3x$. Найти $f''\left(-\frac{\pi}{2}\right), f''(0), f''\left(\frac{\pi}{18}\right).$

№12. Показать, что функция $y = x^2 \ln x$ удовлетворяет уравнению $xy'' - y' = 2x$.

№13. Показать, что функция $y = e^x \sin 2x$ удовлетворяет уравнению $y'' - 2y' + 5y = 0$.

№14. Дана функция $f(x) = x e^x$. Найти $f'''(-3), f'''(0), f'''(-1).$

№15. Дана функция $f(x) = \cos^2 2x$. Найти $f'''\left(-\frac{\pi}{2}\right),$

$$f'''\left(-\frac{\pi}{24}\right), f'''\left(\frac{2\pi}{3}\right).$$

§ 4. Геометрический смысл производной.

$f'(x_0)$ является угловым коэффициентом касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 . Напомним, что угловым коэффициентом прямой равен тангенсу угла, образованного этой прямой с положительным направлением оси Ox .

$$f'(x) = k = \operatorname{tg} \alpha$$

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 :

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Прямая, перпендикулярная касательной к графику функции $y = f(x)$, проходящая через точку касания, называется *нормалью* графика данной функции.

$$\text{Уравнение нормали: } y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Пример 5. Составить уравнение касательной и нормали к графику функции $f(x) = x^2 - 3x$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

Решение:

1) Уравнение касательной имеет вид: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$

2) Найдём значение функции в точке $x_0 = 1$:
 $f(x_0) = f(1) = 1^2 - 3 \cdot 1 = -2$

3) Найдём производную функции: $f'(x) = 2x - 3$

4) Найдём значение производной функции в точке $x_0 = 1$:

$$f'(x_0) = f'(1) = 2 \cdot 1 - 3 = -1$$

5) Уравнение касательной примет вид: $y = -2 - 1(x - 1); y = -x - 1$

6) Уравнение нормали: $y = -2 + 1(x - 1); y = x - 3$

Ответ: $y = -x - 1$ (касательная); $y = x - 3$ (нормаль).

Пример 6. Составить уравнение касательной, проведённой к графику функции $f(x) = -x^2 - 4$ параллельно прямой $y = -2x + 6$.

Решение:

Так как касательная параллельна прямой $y = -2x + 6$, то её угловой коэффициент $k = -2$. С другой стороны, $k = f'(x)$. Абсциссу точки x_0 находим из условия $f'(x_0) = -2$. Так как $f'(x) = (-x^2 + 4)' = -2x$, то $-2x_0 = -2$, откуда $x_0 = 1$.

Составим уравнение касательной: $y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, где $x_0 = 1$, $y_0 = -1 + 4 = 3$, тогда $y - 3 = -2(x - 1)$, откуда $y = -2x + 5$.

Ответ: $y = -2x + 5$.

Пример 7. Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x + 7$ в точке с абсциссой $x_0 = 3$.

Решение:

Т.к. $k = f'(x_0)$ то:

1) $f'(x) = x^2 - 2$;

2) $f'(3) = 9 - 2 = 7$;

3) $k = 7$.

Ответ: $k = 7$.

$$f'(x) = k = \operatorname{tg} \alpha; \quad \alpha = \operatorname{arctg} k$$

Решите задачи:

№1. Найти угловой коэффициент касательной к графику функции

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x + 7$ в точке с абсциссой $x_0 = 3$.

Ответ: $k = 7$.

№2. Найти угловой коэффициент касательной к графику функции

$f(x) = 8x^3 + 6x^2 - 4x$ в точке с абсциссой $x_0 = -1$.

Ответ: $k = 8$.

№3. Найти угол между касательной к графику функции

$f(x) = -2\sin x + 3x$ в точке с абсциссой $x_0 = 0$, и положительным

направлением оси абсцисс.

Ответ: $\alpha = \frac{\pi}{4}$

№4. Найти угол между касательной к графику функции $f(x) = 3\cos x + 3x$ в точке с абсциссой $x_0 = \frac{\pi}{2}$, и положительным

направлением оси абсцисс.

Ответ: $\alpha = 0$

Составить уравнения касательной и нормали к графику кривой $y = f(x)$ в точке, абсцисса которой равна x_0 .

а) $y = 2x^3 - 3x + 5$, $x_0 = -1$,

б) $y = \sqrt{4 - 2x^2}$, $x_0 = 1$.

§ 5. Механический смысл производной.

Пусть $S = S(t)$ – уравнение зависимости пути от времени при движении какого-то тела.

Тогда $S'(t) = U(t)$ – скорость движения этого тела в момент времени t .

$S''(t) = U'(t) = a(t)$ – ускорение движущегося тела в момент времени t .

Решите задачи:

№1. При движении тела по прямой расстояние $S(t)$ в метрах от начальной точки M изменяется по закону $S(t) = t^3 - t^2 - t + 5$ (t – время в секундах). Определить скорость и ускорение через 4с. после начала движения.

Ответ: $U(4) = 39 \text{ м/с}$, $a(4) = 22 \text{ м/с}^2$.

№2. При движении тела по прямой расстояние $S(t)$ в метрах от начальной точки M изменяется по закону $S(t) = 2t^4 - t^3 + 1$ (t – время в секундах). Определить скорость и ускорение через 2с. после начала движения.

Ответ: $U(2) = 52 \text{ м/с}$, $a(2) = 84 \text{ м/с}^2$.

№3. Тело движется по закону $S(t) = t^3 - 2t^2 + 3t + 6$ (t – время в секундах).

Через сколько секунд мгновенное ускорение будет равно 11 м/с^2 .

Ответ: $t = 2,5 \text{ с}$.

№4. Скорость движения тела изменяется по формуле: $U(t) = 2t^2 - t + 2$, через сколько секунд мгновенное ускорение будет равно 7 м/с^2 .

Ответ: $t = 2 \text{ с}$.

№5. Тело движется по закону $S(t) = t^3 + 2t + 1$ (t - время в часах).

Через сколько часов мгновенная скорость будет равна 50 км/ч .

Ответ: $t = 4 \text{ ч}$.

№6. Скорость движения тела изменяется по формуле:

$$U(t) = 6t^2 - 12t + 12,$$

(t - время в секундах). Найти скорость тела в момент, когда его ускорение будет равно нулю.

Ответ: $U(1) = 6 \text{ м/с}$.

№7. Два тела совершают прямолинейное движение

$$S_1(t) = 3t^2 - 2t + 10;$$

$S_2(t) = t^2 + 5t + 1$. Через сколько секунд скорость движения 1-го тела будет в 2 раза больше скорости движения второго тела.

Ответ: 6 с .

Применения производной.

Если $f'(x) > 0$ на промежутке, то $f(x)$ возрастает на этом промежутке.

Если $f'(x) < 0$ на промежутке, то $f(x)$ убывает на этом промежутке.

Если $f'(x) = 0$ на промежутке, то $f(x) = C$ (константа) на этом промежутке.

Критические точки функции находят из условия $f'(x) = 0$ или $f'(x)$ не существует на области определения функции.

Если в точке x_0 производная меняет знак, то x_0 - точка экстремума.

При изменении знака производной с «+» на «-» x_0 - точка максимума, а с «-» на «+» x_0 - точка минимума.

Если $f(x)$ дифференцируема на промежутке, то $f(x)$ непрерывна на этом промежутке.

§ 6. Нахождение промежутков монотонности и точек экстремума функции.

Пример 8. Доказать, что функция $y = 2x^5 + 4x^3 - 1$ возрастает на всей числовой прямой.

Решение:

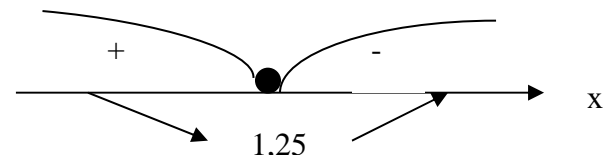
Найдём производную функции $y' = 10x^4 + 12x^2$. Заметим, что $10x^4 + 12x^2 \geq 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$, а это и означает, что функция возрастает на всей числовой прямой. Точек экстремума нет.

Пример 9. Найти промежутки монотонности функции

$$y = 2x^2 - 5x + 3$$

$$1) y' = 4x - 5$$

$$2) y' = 0; \quad 4x - 5 = 0, \quad x = 1,25$$



Ответ: Функция убывает при $x \in (-\infty; 1,25]$, и возрастает при $x \in [1,25; +\infty)$.

$x = 1,25$ - точка минимума.

Пример 10. Найти промежутки монотонности функции $f(x) = -\frac{3}{x}$

Решение:

$$1) D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$2) f'(x) = -\frac{3}{x^2}$$

$$3) f'(x) < 0 \text{ при любых } x \neq 0.$$

Ответ: Функция убывает на $(-\infty; 0)$ и на $(0; +\infty)$

Найдите промежутки монотонности следующих функций:

$$\text{№1. } y = x^2 - 6x + 5;$$

№2. $y = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2;$

№3. $y = x^4 - 4x + 3;$

№4. $y = \frac{1}{3x-2};$

№5. $y = \frac{1}{2}x^2 - \ln x.$

§ 7. Алгоритм нахождения экстремумов функций с помощью первой производной.

1. Найти производную $f'(x)$.
2. Найти критические точки функции $y = f(x)$, т.е. точки в которых $f'(x) = 0$ или не существует (терпит разрыв).
3. Исследовать знак производной $f'(x)$ в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определения функции $f(x)$. При этом критическая точка x_0 есть точка минимума если она отделяет промежуток, в котором $f'(x) < 0$, от промежутка, в котором $f'(x) > 0$, и точка максимума – в противном случае. Если же в соседних промежутках, разделённых критической точкой знак не меняется, то в точке x_0 функция экстремума не имеет.
4. Вычислить значения функции в точках экстремума.

Пример 11. Исследовать на экстремум функцию:

$$y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 8$$

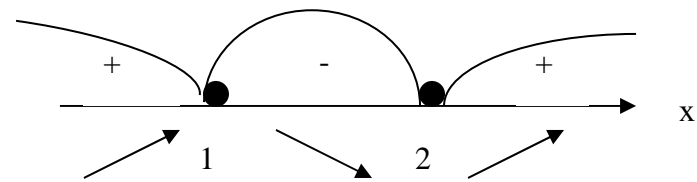
Решение:

1) $y' = 6x^2 - 18x + 12$

2) $y' = 0; 6x^2 - 18x + 12 = 0 / : 6$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$x_1 = 2, x_2 = 1.$$



Так как производная $y'(x)$ при переходе через стационарную точку меняет знак с плюса на минус, то $x = 1$ – точка максимума функции. $y(1) = -3$ – значение функции в точке максимума. $x = 2$ – точка минимума. $y(2) = -4$ – значение функции в точке минимума.

Ответ: $x = 1$ – точка максимума, $y_{\max} = -3;$

$x = 2$ – точка минимума, $y_{\min} = -4.$

Исследуйте на экстремум следующие функции:

№1. $y = 7 + 12x - x^3;$

№2. $y = 3x^3 + 2x^2 - 7;$

№3. $y = x^4 - 8x^2;$

№4. $y = 2x + \frac{8}{x};$

№5. $y = \sqrt{2x-5};$

№6. $y = (x-3)^4;$

№7. $y = 2 \sin 2x - \sin 4x;$

№8. $y = \cos 2x - x.$

§ 8. Исследование функции на экстремум с помощью второй производной.

Если y' производная от функции $y = f(x)$, то производная от y' по x (если она существует) называется *второй производной* (или производной второго порядка). Для второй производной употребляются следующие обозначения: y'' или $f''(x)$.

Алгоритм нахождения экстремумов функции $y = f(x)$ с помощью второй производной.

1. Найти производную $f'(x)$.
2. Найти критические точки данной функции, в которых $f'(x) = 0$.
3. Найти вторую производную $f''(x)$.
4. Исследовать знак второй производной в каждой из критических точек.

Если при этом вторая производная окажется отрицательной, то функция в такой точке имеет максимум, а если положительной, то – минимум. Если же вторая производная равна нулю, то экстремум функции надо искать с помощью первой производной.

5. Вычислить значение функции в точках экстремума.

Пример 12. Исследовать на экстремум с помощью второй производной:

а) $f(x) = x^2 - 2x - 3$

1. Находим производную: $f'(x) = 2x - 2$.

2. Решая уравнение: $f'(x) = 0$, получим критическую точку $x = 1$.

3. Найдем теперь вторую производную: $f''(x) = 2$.

4. Так как вторая производная в критической точке положительна, то при $x = 1$ функция имеет минимум: $f_{\min} = f(1) = -4$.

б) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 12$.

1. Находим $f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$; $f'(x) = 0$; $3x^2 - 18x + 24 = 0$, откуда $x_1 = 2, x_2 = 4$.

2. Найдём теперь $f''(x) = 6x - 18$.

3. Определим знак второй производной в критических точках. Так как $f''(2) = 6 \cdot 2 - 18 = -6 < 0$, то при $x = 2$ функция имеет максимум; так как $f''(4) = 6 \cdot 4 - 18 = 6 > 0$, то при $x = 4$ функция имеет минимум.

4. Вычислим значения функции в точках экстремума:

$$f_{\max} = f(2) = 8, \quad f_{\min} = f(4) = 4.$$

Исследуйте на экстремум с помощью второй производной следующие функции:

1) $f(x) = 2x^2 - 3$;

5) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 4$;

2) $f(x) = x^2 - 2x$;

6) $f(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 6x - 2$;

3) $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$;

7) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$;

4) $f(x) = -x^2 + 4x$;

8) $f(x) = \frac{3x}{x^2 + 1}$.

§ 9. Наибольшее и наименьшее значения функции.

Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений функции, непрерывной в некотором промежутке.

1. Найти критические точки, принадлежащие заданному промежутку, и

вычислить значения функции в этих точках;

2. Найти значения функции на концах промежутка;

3. Сравнить полученные значения; тогда наибольшее и наименьшее из них являются соответственно наименьшим и наибольшим значениями функции на рассматриваемом промежутке.

Пример 13. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^2 - 4x + 3$ на $[0; 3]$.

1. $f'(x) = 2x - 4$; $2x - 4 = 0$; $x = 2$ – критическая точка. $f(2) = -1$.

2. Находим значения функции на концах данного отрезка $f(0) = 3$, $f(3) = 0$.

3. Сравниваем.

Ответ: $\max_{[0;3]} f(x) = f(0) = 3$, $\min_{[0;3]} f(x) = f(2) = -1$.

Найдите наибольшее и наименьшее значения функций в заданных промежутках:

1) $f(x) = x^2 - 6x + 13$, $[0; 6]$;

2) $f(x) = 8 - 0,5x^2$, $[-2; 2]$;

3) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$, $[1; 3]$;

4) $f(x) = 6x^2 - x^3$, $[-1; 6]$;

5) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$, $[-4; 4]$;

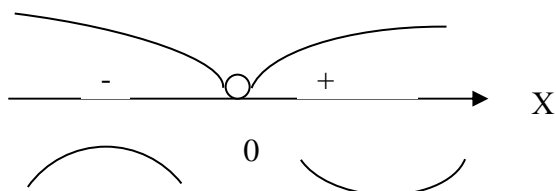
6) $f(x) = -x^3 + 9x^2 - 24x + 10$, $[0; 3]$.

§ 10. Направление выпуклости графика функции $y = f(x)$.

Если в некотором промежутке $f''(x) > 0$, то кривая выпукла вниз на этом промежутке, если же $f''(x) < 0$, то кривая выпукла вверх в этом промежутке.

Пример 14. Найти промежутки выпуклости кривой $f(x) = x^3$

- $f'(x) = 3x^2$,
- $f''(x) = 6x$, $f''(x) = 0$ при $x = 0$
- С помощью метода интервалов определим знаки второй производной:



Ответ: Кривая выпукла вверх при $x \in (-\infty; 0)$, и выпукла вниз при $x \in (0; \infty)$.

Исследуйте на направление выпуклости кривые:

- | | |
|--------------------------|---|
| 1) $y = 4x^3 - 2$; | 4) $y = -2x^2 - 4$; |
| 2) $y = 3x^3 - 2x + 5$; | 5) $y = x^3 - 6x^2 + 2x + 3$; |
| 3) $y = 4x^2 + 5x$; | 6) $y = x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 24x + 8$. |

§ 11. Точки перегиба.

Точка графика функции $y = f(x)$, разделяющая промежутки выпуклости противоположных направлений этого графика, называется точкой перегиба.

Точками перегиба могут служить только критические точки, принадлежащие области определения $y = f(x)$, в которых вторая производная $f''(x) = 0$ или не существует.

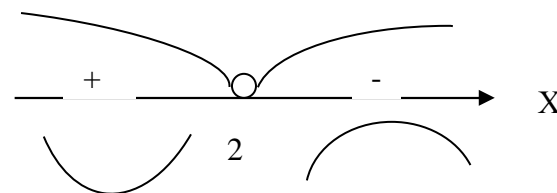
Если при переходе через критическую точку x_0 , вторая производная $f''(x)$ меняет знак, то график функции имеет точку перегиба $(x_0; f(x_0))$.

Алгоритм нахождения точек перегиба графика функции $y = f(x)$.

- Найти вторую производную $f''(x)$.
- Найти критические точки функции $y = f(x)$, в которых вторая производная $f''(x)$ обращается в нуль или терпит разрыв.
- Исследовать знак второй производной $f''(x)$ в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определения данной функции. Если при этом критическая точка x_0 разделяет промежутки выпуклости противоположных направлений, то x_0 является абсциссой точки перегиба функции..
- Вычислить значения функции в точках перегиба.

Пример 15. Найти точки перегиба кривой $f(x) = 6x^2 - x^3$.

- $f'(x) = 12x - 3x^2$, $f''(x) = 12 - 6x$.
- $f''(x) = 0$, $12 - 6x = 0$, $x = 2$ - критическая точка.
-



при $x = 2$ кривая имеет точку перегиба.

$$4. f(2) = 6 \cdot 4 - 8 = 16$$

Ответ: $(2; 16)$ – точка перегиба.

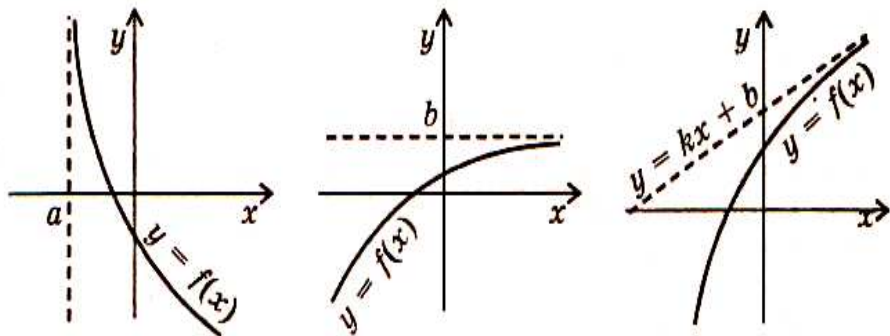
Найти точки перегиба следующих кривых:

- | | |
|--|--|
| 1) $f(x) = x^3 - 2x$; | 3) $f(x) = x^4 - 10x^3 + 36x^2 - 10$; |
| 2) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x - 4$; | 4) $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 10$. |

§ 12. Асимптоты.

Если график функции $y = f(x)$ имеет бесконечную ветвь (ветви), у графика могут быть асимптоты.

Асимптотой графика называется прямая, к которой неограниченно приближается точка графика при удалении этой точки по бесконечной ветви.



Вертикальная асимптота
 $x = a$

Горизонтальная асимптота
 $y = b$

Наклонная асимптота
 $y = kx + b$

Прямая $x = a$ является **вертикальной асимптотой**, если хотя бы один из пределов $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ (предел слева) или $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ (предел справа) равен бесконечности.

Прямая $y = b$ является **горизонтальной асимптотой**, если существуют конечные пределы

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b \text{ или } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b.$$

Прямая $y = kx + b$ является **наклонной асимптотой**, если существуют конечные пределы

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx)$$

либо при $x \rightarrow \infty$, либо при $x \rightarrow -\infty$.

Пример 16. Найти асимптоты графика функции $y = \frac{x^3}{x^2 + 1}$

Решение: Очевидно график функции не имеет ни вертикальных асимптот (нет точек разрыва), ни горизонтальных асимптот ($\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2 + 1} = \infty$).

Найдём наклонную асимптоту.

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{x^2 + 1} \div x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2 + 1} = 1;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - 1 \cdot x] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 + 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(-\frac{x}{x^2 + 1} \right) = 0.$$

Таким образом, наклонная асимптота графика функции имеет вид $y = x$.

§ 13. Применение производной к построению графиков функций.

Алгоритм построения графиков функций:

1. Найти область определения функции.
2. Выяснить, не является ли функция чётной, нечётной или периодической.
3. Найти точки пересечения графика функции с осями координат (если это не вызывает затруднений).
4. Найти асимптоты графика функции.
5. Найти промежутки монотонности функции и её экстремумы.
6. Найти промежутки выпуклости графика функции и точки перегиба.
7. Построить график функции, используя полученные результаты исследования.

Пример 17. Построить график функции $y = \frac{x^2}{x-3}$

Решение:

1. Найдём область определения функции: $D(y) = \begin{cases} -\infty < x < 3, \\ 3 < x < \infty. \end{cases}$

2. Данная функция не является ни чётной, ни нечётной, ни периодической.

3. При $x = 0$ получим $y = 0$, т.е. график проходит через начало координат.

4. Так как $\lim_{x \rightarrow 3 \pm 0} = \pm\infty$, то прямая $x = 3$ служит вертикальной асимптотой графика.

Далее находим:

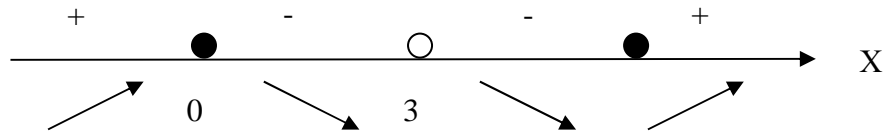
$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x(x-3)} = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{x^2}{x-3} - x \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x}{x-3} = 3.$$

Следовательно, прямая $y = x + 3$ является наклонной асимптотой графика.

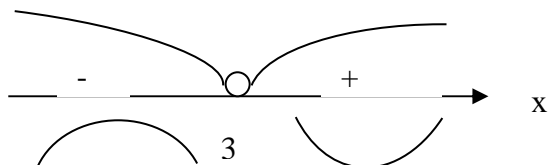
5. Находим
$$y' = \frac{2x(x-3) - x^2}{(x-3)^2} = \frac{x^2 - 6x}{(x-3)^2} = \frac{x(x-6)}{(x-3)^2}.$$

Производная y' обращается в нуль при $x = 0$ и $x = 6$ и терпит разрыв при $x = 3$.



$$y_{\max} = y(0) = 0, \quad y_{\min} = y(6) = 12.$$

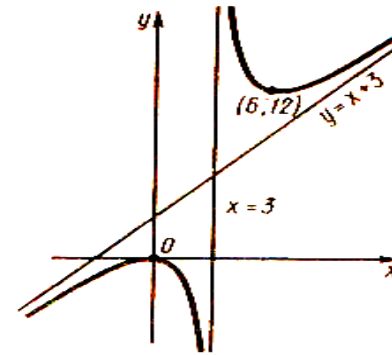
6. Находим
$$y'' = \frac{(2x-6)(x-3)^2 - 2(x-3)(x^2-6x)}{(x-3)^4} = \frac{18}{(x-3)^4}.$$



Вторая производная в нуль нигде не обращается и терпит разрыв при $x = 3$.

Точек перегиба нет.

7. На основании полученных данных строим график функции.



Исследуйте следующие функции и постройте их графики.

1) $y = 3x^2 - 4x + 5;$

2) $y = 7 - x - 2x^2;$

3) $y = 3x^2 - x^3;$

4) $y = x^3 + 3x^2;$

2) 5) $y = x^3 - 3x^2 + 2;$

6) $y = -x^3 + 6x^2 - 5;$

7) $y = 2x^3 + x^2 - x - 1;$

8) $y = x^3 + x^2 - x - 1$

9) $y = -\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x - \frac{11}{3};$

10) $y = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x + \frac{5}{3};$

11) $y = -x^4 + 5x^2 - 4;$

12) $y = 2x^4 - 9x^2 + 7;$

13) $y = x^5 - 5x;$

14) $y = 5x^3 - 3x^5;$

15) $y = \frac{x+2}{x-3};$

16) $y = \frac{x-3}{x+1};$

Проверочная работа.

Вариант 1.

- 1) Найдите промежутки монотонности функции:

$$y = x^4 - 32x + 40.$$

- 2) Найти наибольшее и наименьшее значение функции: $y = x^3 - x^2 - 9x$ на отрезке $[-2; 2]$.

- 3) Найти промежутки выпуклости и точки перегиба кривых:

а) $y = x^3 + 3x^2$;

б) $y = \frac{1}{3}x^3 - 4x$.

Дан закон прямолинейного движения точки

$$S = -\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 2t - 3 \quad (t - \text{в секундах, } S - \text{в метрах}).$$

Найдите максимальную скорость точки.

- 4) Найти производные сложных функций:

а) $y = 4(2x^2 - 4x)^4$;

б) $y = 2e^{4x-2} + \ln(4x - 5)$;

в) $y = 2\cos^5(2x - 5)$;

г) $y = \sqrt{4x^2 - 5x} + \frac{4}{4x + 3}$.

Вариант 2.

- 1) Найдите промежутки монотонности функции:

$$y = \frac{1}{4}x^4 - x + 1.$$

- 2) Найти наибольшее и наименьшее значение функции:

$$y = -x^3 + 9x^2 - 24x + 2$$
 на отрезке $[-4; 4]$.

- 3) Найти промежутки выпуклости и точки перегиба кривых:

а) $y = 2x^3$;

б) $y = x^3 - 6x^2 + 2x - 4$.

Дан закон прямолинейного движения точки

$$S = -\frac{1}{3}t^3 + 3t^2 + 4t - 3 \quad (t - \text{в секундах, } S - \text{в метрах}).$$

Найдите максимальную скорость точки.

- 4) Найти производные сложных функций:

а) $y = 3(2x^3 - 4x)^3$;

б) $y = 4e^{4x} + 3\ln(2x^3 - 4)$;

в) $y = 2\sin^4(2x^2 - 7x)$;

г) $y = \sqrt{x^2 - 5x^3} + \frac{4}{x + 1}$.

Оглавление

Предисловие	2
§ 1. Производные элементарных функций.	3
§ 2. Производные сложных функций.	6
§ 3 Производные высших порядков.	7
§ 4. Геометрический смысл производной.	10
§ 5. Механический смысл производной.	11
§ 6. Нахождение промежутков монотонности и точек экстремума функции.	13
§ 7. Алгоритм нахождения экстремумов функций с помощью первой производной.	14
§ 8. Исследование функции на экстремум с помощью второй производной.	15
§ 9. Наибольшее и наименьшее значения функции.	17
§ 10. Направление выпуклости графика функции $y = f(x)$.	18
§ 11. Точки перегиба.	19
§ 12. Асимптоты.	20
§ 13. Применение производной к построению графиков функций.	21
Проверочная работа.	24

Используемая литература.

1. Н.В. Богомолов «Практические занятия по математике»
Москва «Высшая школа» 2000 г.
2. Э.Н. Балаян «Репетитор по математике для поступающих в вузы».
Ростов-на-Дону «Феникс» 2003г.
3. А.Г. Мордкович «Алгебра и начала анализа 10-11 класс »
Москва 2003 г.
4. В.А.Подольский, А.М. Суходский «Сборник задач по математике»
Москва «Высшая школа» 1999г.