ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОУ СПО
«ЛЕНИНГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ»

Практическое пособие
по изучению раздела

Интегральное исчисление

Составила: Миргородская Ирина Николаевна,
преподаватель математики

ст. Ленинградская
2006 г.

Пособие составлено в соответствии с государственными требованиями к минимуму содержания и уровню подготовки выпускников по специальностям среднего профессионального образования.

Данное пособие ставит своей целью оказание помощи студентам, обучающимся по специальностям 080110 «Экономика и бухгалтерский учет» (по отраслям), в организации их самостоятельной работы по овладению системой знаний, умений и навыков в объеме действующей программы.

В данном пособии представлено краткое содержание основного теоретического материала, подробное решение примеров и упражнения для самостоятельной работы. Итоговая контрольная работа позволит закрепить полученные знания по данной теме.

Пособие может быть использовано преподавателями математики при подготовке к лекционным и практическим занятиям.

Содержание

Из истории интегрального исчисления.

История понятия интеграла тесно связана с задачами нахождения квадратур. Задачами о квадратуре той или иной плоской фигуры математики Древней Греции и Рима называли задачи, которые мы сейчас относим к задачам на вычисление площадей.

Символ $\int$ введен Г. Лейбницем (1675 г.). Этот знак является изменением латинской буквы S (первой буквы слова summa). Само слово *интеграл* придумал Я. Бернулли (1690 г.). Вероятно, оно происходит от латинского integro, которое переводится, как *приводить в прежнее состояние, восстанавливать*. В 1696 г. появилось название новой ветви математики – интегральное исчисление (calculus integralis), которое ввел И.Бернулли.

Употребляющееся сейчас название *первообразная функция* заменило более раннее «примитивная функция», которое ввел Лагранж (1797 г.).

В современной литературе множество всех первообразных для функции *f (x)* называется также *неопределенным интегралом*. Это понятие выделил Лейбниц, который заметил, что все первообразные функции отличаются на произвольную постоянную. А $\int_a^b f(x)dx$ называют *определенным интегралом* (обозначение ввел К.Фурье (1768 – 1830), но пределы интегрирования указывал уже Эйлер).

1. Первообразная функция и неопределенный интеграл

Пусть y = F(x) имеет производную $y' = f(x)$, тогда ее дифференциал

$dy = f(x)\,dx$

Функция F(x) по отношению к ее дифференциалу *f(x) dx* называется **первообразной.**

Определение: Функция F(x) называется **первообразной** для функции *f (x)* на заданном промежутке, если для всех *x* из этого промежутка F'(x) = *f (x).*

Дифференциалу функции соответствует не единственная первообразная, а множество их, причем они отличаются друг от друга постоянным слагаемым.

Пусть F(x) - первообразная для дифференциала *f (x) dx.*

Тогда:

$$(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x)$$, где C - постоянная.

Определение: совокупность всех первообразных функций F(x) + C для дифференциала *f (x) dx.* называется **неопределенным интегралом** и обозначается $\int f(x)dx$.

Таким образом,

$\int f(x)dx$ = F(x) + C,

Где *f(x) dx.* называется подынтегральным выражением, а C – произвольной постоянной интегрирования.

Например: $\int 2xdx = x^2 + C$, так как $(x^2 + C)' = 2x$.

Процесс нахождения первообразной функции называется **интегрированием**.

Интегрирование – это действие, обратное дифференцированию.

1.1 Свойства неопределенного интеграла

1) $d\int f(x)dx = f(x)\,dx$,

т.е. дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению.

2) $\int dF(x)$ = F(x) + C,

т.е. неопределенный интеграл от дифференциала функции равен этой функции, сложенной с произвольной постоянной.

3) $\int a \cdot f(x)dx = a \cdot \int f(x)dx$, где a = const, т.е. постоянную величину можно вынести за знак интеграла.

4) $\int [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx - \int f_3(x)dx$,

т.е. интеграл суммы или разности функций равен сумме или разности интегралов.

1.2 Формулы интегрирования

Справедливость каждой формулы проверяется дифференцированием.

1. $\int dx = x + c$
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$, $n \neq -1$
3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + c$
4. $\int \frac{dx}{x} = \ell n|x| + c$
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ell na} + c$
6. $\int e^x dx = e^x + c$
7. $\int \sin x dx = -\cos x + c$
8. $\int \cos x dx = \sin x + c$
9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c$
10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c$
11. $\int tgxdx = -\ell n|\cos x| + c$
12. $\int ctgxdx = \ell n|\sin x| + c$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$
14. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + c$
15. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c$
16. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \cdot arctg \frac{x}{a} + c$
17. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ell n\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c$
18. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \cdot \ell n\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$
19. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ell n\left|tg \frac{x}{2}\right| + c$
20. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ell n\left|tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right| + c$

В практике интегрирования часто встречаются интегралы, для нахождения которых можно использовать следующие формулы:

1. $\int e^{kx} dx = \frac{1}{k} e^{kx} + c$
2. $\int a^{kx} dx = \frac{1}{k} \frac{a^{kx}}{\ell na} + c$
3. $\int \sin kx dx = -\frac{1}{k} \cos kx + c$
4. $\int \cos kx dx = \frac{1}{k} \sin kx + c$
5. $\int \frac{dx}{\cos^2 kx} = \frac{1}{k} tgkx + c$
6. $\int \frac{dx}{\sin^2 kx} = -\frac{1}{k} ctgkx + c$
7. $\int \frac{dx}{k^2 + n^2 x^2} = \frac{1}{nk} arctg \frac{n}{k} x + c$
8. $\int \frac{dx}{\sqrt{k^2 - n^2 x^2}} = \frac{1}{n} \arcsin \frac{n}{k} x + c$

1.3 Интегрирование некоторых тригонометрических функций.

При вычислении интегралов вида $\int \sin^{2n} xdx$ или $\int \cos^{2n} xdx$ от четной степени синуса или косинуса используются формулы понижения степени $\sin^2 x = \frac{1-cos2x}{2}$, $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$.

При вычислении интегралов вида $\int \sin^{2n+1} xdx$ или $\int \cos^{2n+1} xdx$ от нечетной степени синуса или косинуса нужно отделить от нечетной степени один множитель и ввести новую переменную, полагая $cos\ x = t$ в первом интеграле и $sin\ x = t$ – во втором.

При вычислении интегралов вида $\int \sin\alpha x \cos\beta x dx$, $\int \sin\alpha x \sin\beta x dx$ и $\int \cos\alpha x \cos\beta x dx$ применяются формулы

$$\sin\alpha x\cos\beta x = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta)x + \sin(\alpha+\beta)x\right],$$

$$\sin\alpha x\sin\beta x = \frac{1}{2}\left[cos(\alpha-\beta)x - \cos(\alpha+\beta)x\right],$$

$$\cos\alpha x\cos\beta x = \frac{1}{2}\left[cos(\alpha-\beta)x + \cos(\alpha+\beta)x\right].$$

1.4 Непосредственное интегрирование.

При непосредственном интегрировании следует пользоваться таблицей интегралов. Интегрируя функции, содержащие переменную в знаменателе дроби или под знаком радикала, нужно вводить степень с отрицательным или дробным показателем, привести подынтегральное выражение к виду какого-либо табличного интеграла.

При интегрировании произведения в ряде случаев полезно предварительно раскрыть скобки.

Примеры:

1. $$\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^2}}dx = \int x^2 \cdot x^{-\frac{2}{3}}dx = \int x^{\frac{4}{3}}dx = \frac{x^{\frac{4}{3}+1}}{\frac{4}{3}+1} + c = \frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}} + c = \frac{3}{7}x^2\sqrt[3]{x} + c$$

2. $$\int (x+3)(x-2)dx = \int (x^2+x-6)dx = \int x^2dx + \int xdx - 6\int dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x + c$$

<u>Задания для самостоятельной работы</u>

1. $\int x^2(1+2x)dx$
2. $\int (4x^2+4x-3)dx$
3. $\int \sqrt[3]{x^2}dx$
4. $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$
7. $\int x(1-x)^2 dx$
8. $\int \frac{xdx}{2\sqrt{x}}$
9. $\int \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}}dx$
10. $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{4x}dx$

5. $\int \frac{x^4 - 2x^3 + 3x^2}{x^2} dx$

6. $\int 3(2x^2 - 1)^2 dx$

11. $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x}} dx$

12. $\int \left(\frac{3}{t^2} - \frac{2}{\sqrt{t}} + \frac{4\sqrt[3]{t^2}}{t} \right) dt$

1.5 Интегрирование методом подстановки.

Если интеграл затруднительно привести к табличному с помощью элементарных преобразований, то в этом случае пользуются методом подстановки (методом замены переменной интегрирования).

Сущность этого метода заключается в том, что путем введения новой переменной удается свести данный интеграл к новому интегралу, который сравнительно легко берется непосредственно.

Для интегрирования методом подстановки можно использовать следующую схему:

1) часть подынтегральной функции надо заменить новой переменной;
2) найти дифференциал от обеих частей замены;
3) все подынтегральное выражение выразить через новую переменную (после чего должен получиться табличный интеграл);
4) найти полученный табличный интеграл;
5) сделать обратную замену.

Примеры:

1. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(5-3x)^2}}$.

Решение. Произведем подстановку $5 - 3x = t$, тогда $-3xdx = dt$, откуда $dx = -\frac{1}{3}dt$. Далее получаем

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(5-3x)^2}} = \int \frac{-\frac{1}{3}dt}{\sqrt[3]{t^2}} = -\frac{1}{3}\int t^{-\frac{2}{3}}dt = -\frac{1}{3}\frac{t^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + c = -\sqrt[3]{t} + c = -\sqrt[3]{5-3x} + c$$

2. Найти интеграл $\int (2+\cos x)^2 \sin x dx$.

Решение. Сначала положим $2 + cosx = t$, тогда $-sinxdx = dt$, откуда $sinxdx = -dt$. Далее получаем

$$\int (2+\cos x)^2 \sin x dx = \int t^2(-dt) = -\int t^2 dt = -\frac{t^3}{3} + c = -\frac{1}{3}(2+\cos x)^3 + c.$$

3. Найти интеграл $\int \frac{dx}{9+4x^2}$.

Решение. Сведем этот интеграл к табличному интегралу $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \cdot arctg \frac{x}{a} + c$. Преобразуем интеграл:

$$\int \frac{dx}{9+4x^2} = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{1+\frac{4}{9}x^2} = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{2}{3}x\right)^2}$$

Введем новую переменную $y = \frac{2}{3}x$, тогда $dy = \frac{2}{3}dx$, откуда $dx = \frac{3}{2}dy$.

Окончательно получим:

$$\int \frac{dx}{9+4x^2} = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{2}{3}x\right)^2} = \frac{1}{9}\cdot\frac{3}{2}\int \frac{dy}{1+y^2} = \frac{1}{6} arctgy + c = \frac{1}{6} arctg\left(\frac{2}{3}x\right) + c.$$

4. Найти интеграл $\int \cos^4 xdx$.

Заменим $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, получим

$$\int \cos^2 xdx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2xdx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + c.$$

$$\int \cos^4 xdx = \int (\cos^2 x)^2 dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2xdx + \frac{1}{4}\int \cos^2 2xdx.$$

В последнем интеграле заменим $\cos^2 2x = \frac{1+\cos 4x}{2}$, тогда получим

$$\int \cos^4 xdx = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}\int (1+\cos 4x)dx = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x + c =$$

$$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + c$$

Задания для самостоятельной работы

1. $\int \frac{x^2 dx}{(2x^3-1)^2}$
2. $\int e^{x^3} x^2 dx$
3. $\int (3+5x)^4 dx$
4. $\int tgxdx$
5. $\int \frac{x^3 dx}{(5x^4+3)^5}$
6. $\int x^3 \cos x^4 dx$
7. $\int \frac{\ell n^2 x}{x} dx$
8. $\int \frac{\cos xdx}{\sqrt{3+\sin x}}$
9. $\int x\sqrt{1+x^2}dx$
10. $\int \cos x \cdot e^{\sin x} dx$
11. $\int \sqrt{4x^3+1} \cdot x^2 dx$
12. $\int \frac{dx}{x\sin^2 \ell nx}$

1.6 Интегрирование по частям

Пусть u и v - дифференцируемые функции от x. Тогда

$$d(u \cdot v) = udv + vdu \, ,$$

откуда следует

$$udv = d(u \cdot v) - vdu..$$

Проинтегрируем обе части этого равенства

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu \, .$$

Так как $\int d(uv) = uv$, то получаем $\int udv = uv - \int vdu$.

Эта формула часто применяется, когда подынтегральной функцией является:

- логарифмическая или обратная тригонометрическая функция;
- произведение каждой из этих функций на алгебраическую;
- произведение, содержащее алгебраические, тригонометрические, показательные функции и др.

Для интегралов вида $\int \ell nxdx, \int arctgxdx, \int \arcsin xdx$ за $\boldsymbol{u}$ принимается подынтегральная функция, а $dv = dx$.

1. Найти интеграл $\int \ell nxdx$.

Пусть $u = \ell nx$, тогда $dv = dx$, $du = \frac{dx}{x}$, $v = x$.. Поэтому

$$\int \ell nxdx = x\ell nx - \int x\frac{dx}{x} = x\ell nx - \int dx = x\ell nx - x + c \, .$$

2. Найдем $\int \arcsin xdx$.

Полагаем $u = arcsinx$, а $dv = dx$, тогда $du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ и $v = x$

Поэтому $\int \arcsin xdx = x\arcsin x - \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$.

К вновь записанному интегралу применяется подстановка $1- x^2 = z$, которая дает $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}$. Поэтому можно записать

$$\int \arcsin xdx = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c \, .$$

Когда интегрирование по частям применяется к подынтегральной функции, имеющей вид произведения, то выбор множителей u и dv должен соответствовать цели перехода к интегралу $\int vdu$, более простому, чем заданный интеграл $\int udv$, причем множитель dv, всегда включающий dx, должен быть легко интегрируемым.

Для интегралов вида $\int P(x)e^{ax}dx$, $\int P(x)\sin mxdx$, $\int P(x)\cos mxdx$ за u принимается многочлен *P(x)*, а для интегралов вида $\int P(x)\ell nxdx$, $\int P(x)arctgxdx$, $\int P(x)\arcsin xdx$ за u принимается ℓnx, *arctg x*, *arcsin x*.

Пример. Найти следующие интегралы:

1. $\int (2x-5)e^{-3x}dx$.

Принимаем $u = 2x - 5$ и $dv = e^{-3x}$, тогда $du = 2dx$ $v = -\frac{1}{3}e^{-3x}$.

$$\int (2x-5)e^{-3x}dx = -\frac{1}{3}(2x-5)e^{-3x} - \int\left(-\frac{2}{3}e^{-3x}\right)dx = -\frac{1}{3}(2x-5)e^{-3x} + \frac{2}{3}\int e^{-3x}dx = -\frac{2x-5}{3}e^{-3x} - \frac{2}{9}e^{-3x} + c = \frac{13-6x}{9}e^{-3x} + c$$

2. $\int \frac{\ell nxdx}{x^2}$.

Положим $u = \ell nx$, $dv = \frac{dx}{x^2}$, тогда $du = \frac{dx}{x}$, $\int dv = \int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2}dx = -\frac{1}{x}$, $v = -\frac{1}{x}$.

По формуле $\int udv = uv - \int vdu$ получим

$$\int \frac{\ell nxdx}{x^2} = -\frac{\ell nx}{x} + \int \frac{1}{x}\frac{dx}{x} = -\frac{\ell nx}{x} + \int x^{-2}dx = -\frac{\ell nx}{x} - \frac{1}{x} + c.$$

Иногда формулу интегрирования по частям приходится применять дважды.

3. $\int x^2 \sin xdx$

$$\int x^2\sin xdx = \begin{vmatrix} u = x^2, & dv = \sin xdx \\ du = 2xdx, & v = -\cos x \end{vmatrix} = -x^2\cos x + 2\int x\cos xdx$$

Снова интегрируем по частям: $\int x\cos xdx = x\sin x - \int \sin xdx = x\sin x + \cos x + c$

В результате получаем окончательный ответ:

$$\int x^2\sin xdx = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + c.$$

4. $\int arctgxdx$

Решение:

$$\int arctgxdx = \begin{vmatrix} u = arctgx, & dv = dx \\ du = \dfrac{dx}{1+x^2}, & v = x \end{vmatrix} = xarctgx - \int\frac{xdx}{1+x^2} =$$

$$= xarctgx - \frac{1}{2}\int\frac{d\left(1+x^2\right)}{1+x^2} = xarctgx - \frac{1}{2}\ell n\left(1+x^2\right) + c$$

Задания для самостоятельной работы

1. $\int xe^x dx$
2. $\int\left(4x^3 + 6x - 7\right)\ell nxdx$
4. $\int x\sin xdx$
5. $\int x\cos 3xdx$

3. $\int \ell n^2 x dx$ 6. $\int e^x \sin x dx$

1.6 Интегрирование простейших рациональных дробей

Рациональной функцией называется дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$, числитель и знаменатель которой – многочлены.

Дробь эта называется правильной, если степень числителя ниже степени знаменателя.

Так дроби

$$\frac{x-1}{x^2+3x+5}, \frac{3}{(x+3)^2}, \frac{x^2}{x^3+8} \text{ - правильные,}$$

а дроби

$$\frac{x^3}{x^2-4}, \frac{x^2-1}{x^2+1}, \frac{x}{ax+в} \text{ - неправильные.}$$

Если требуется проинтегрировать неправильную дробь, то предварительно следует перейти к правильной дроби путем выделения целой части.

Так, $\frac{x^3}{x^2-1} = \frac{x^3-x+x}{x^2-1} = x + \frac{x}{x^2-1}$, а потому

$$\int \frac{x^3}{x^2-1} dx = \int x dx + \int \frac{x dx}{x^2-1} = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \ell n \left| x^2 - 1 \right|.$$

Рассмотрим некоторые случаи интегрирования правильных дробей:

1. *Степень знаменателя равна* 1.

Интеграл $\int \frac{A}{ax+в} dx$ вычисляется непосредственно как интеграл от степенной функции при n= -1.

Например: $\int \frac{2}{3x+1} dx = 2 \int \frac{dx}{3x+1} = \frac{2}{3} \int \frac{d(3x+1)}{3x+1} = \frac{2}{3} \ell n |3x+1| + c$

2. *Степень знаменателя равна* 2,

т.е. имеем интеграл $\int \frac{(Mx+N)dx}{ax^2+bx+c}$.

При $a \neq 1$ делением числителя и знаменателя дроби на a интеграл приводится к виду

$$\int \frac{(mx+n)}{x^2+px+q} dx.$$

Здесь различают три случая.

а) $\frac{p^2}{4}-q=0$, т.е. корни знаменателя действительные и равные.

Тогда $x^2 + px + q = (x - x_1)^2$, и интеграл приводится к виду $\int\frac{mx+n}{(x-x_1)^2}dx$.

Этот интеграл вычисляется подстановкой $x - x_1 = t$.

б) $\frac{p^2}{4}-q\prec 0$, т.е.корни трехчлена мнимые.

В этом случае подынтегральная функция разбивается на два слагаемых, причем в правом из них числитель выделяется в виде половины производной знаменателя, а во втором знаменатель приводится к сумме квадратов:

$$\frac{(mx+n)}{x^2+px+q}=\frac{m\left(x+\frac{p}{2}\right)+n-\frac{mp}{2}}{x^2+px+q}=\frac{m\left(x+\frac{p}{2}\right)}{x^2+px+q}+\frac{n-\frac{mp}{2}}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}.$$

Этим заданный интеграл разбивается на два.

в) $\frac{p^2}{4}-q\succ 0$; корни трехчлена действительные различные. Тогда

$$\frac{(mx+n)}{x^2+px+q}=\frac{mx+n}{(x-x_1)(x-x_2)}$$

и полученная дробь раскладывается на две простейшие:

$$\frac{mx+n}{(x-x_1)(x-x_2)}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}.$$

Числители этих дробей находятся методом неопределенных коэффициентов.

После приведения правой части к общему знаменателю имеем

$$\frac{mx+n}{(x-x_1)(x-x_2)}=\frac{A(x-x_2)+B(x-x_1)}{(x-x_1)(x-x_2)}.$$

Сравнение числителей дает $A(x - x_2) + B(x - x_1) = mx + n$..

При $x = x_1$ определяем A и при $x = x_2$ определяем B.

Задания для самостоятельной работы

1. $\int\frac{6xdx}{(x^2+1)^2}$
2. $\int\frac{2dx}{x^2}$
3. $\int\frac{dx}{x^2+5x}$
4. $\int\frac{2x+5}{x^2-6x+9}dx$

2. Определенный интеграл

Приращение *F(b) – F(a)* любой из первообразных функций *F(x) + C* при изменении аргумента от *x = a до x = b* называется определенным интегралом, и обозначается: $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Таким образом $\int\limits_a^b f(x)dx$ = *F(b) – F(a)*, эта формула Ньютона-Лейбница

a – нижний предел интеграла,

b – верхний предел интеграла.

Для вычисления определенного интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ нужно найти соответствующий неопределенный интеграл, в полученное его выражение подставить вместо *x* сначала верхний, а затем нижний пределы определенного интеграла и из первого результата подстановки вычесть второй.

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Например $$\int\limits_{-1}^{1}\left(x^2+1\right)dx = \left(\frac{x^3}{3}+x\right)\Big|_{-1}^{1} = \left(\frac{1}{3}+1\right) - \left(-\frac{1}{3}-1\right) = 2\frac{2}{3}$$

2.1 Свойства определенного интеграла

1. $\int\limits_a^b C\cdot f(x)dx = C\int\limits_a^b f(x)dx$, где C - постоянная
2. $\int\limits_a^b [f_1(x)+f_2(x)-f_3(x)]dx = \int\limits_a^b f_1(x)dx + \int\limits_a^b f_2(x)dx - \int\limits_a^b f_3(x)dx$
3. $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$

Пример 1. Вычислить интеграл методом непосредственного интегрирования:

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-\sin x\right)dx = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^2 x} - \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sin x dx = tgx\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} + \cos x\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= tg\frac{\pi}{4} - tg\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \cos\frac{\pi}{4} - \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 1-(-1)+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2} = 2$$

Пример 2. Вычислить интеграл методом подстановки:

$$\int_0^7 \frac{dx}{\sqrt[3]{8-x}} = \left| \begin{matrix} 8-x=t \\ dx=-dt \end{matrix} \right| = \int_0^7 \frac{-dt}{\sqrt[3]{t}} = -\int_0^7 t^{-1/3}dt = -\frac{t^{2/3}}{2/3}\Bigg|_0^7 = -\frac{3}{2}\sqrt[3]{t^2}\Bigg|_0^7 = -\frac{3}{2}\sqrt[3]{(8-x)^2}\Bigg|_0^7 =$$

$$= -\frac{3}{2}(1-4) = \frac{9}{2} = 4{,}5.$$

Пример 3. Вычислить определенный интеграл, применяя формулу интегрирования по частям:

$$\int_e^4 x\ell nxdx = \left| \begin{matrix} u=\ell nx, \ dv=xdx \\ du=\dfrac{dx}{x}, v=\dfrac{x^2}{2} \end{matrix} \right| = \frac{x^2}{2}\ell nx\Bigg|_e^4 - \frac{1}{2}\int_e^4 x^2\frac{dx}{x} = 8\ell n4 - \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}x^2\Bigg|_e^4 =$$

$$= 8\ell n4 - \frac{e^2}{2} - 4 + \frac{e^2}{4} = 8\ell n4 - 4 - \frac{e^2}{4}.$$

Задания для самостоятельной работы

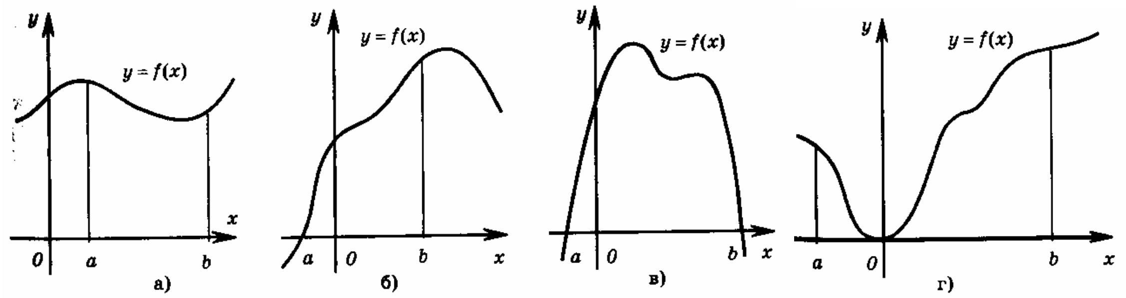
1. $\int_0^2 (2-x)^2 dx$
2. $\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{x^4+16}x^3dx$
3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin xdx$
4. $\int_2^4 \frac{xdx}{(x^2-1)^3}$
5. $\int_0^4 (2\sqrt{x}-x^2)dx$
6. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos xdx}{(3-\sin x)^2}$
7. $\int_1^2 \frac{2x^2+1}{x}dx$
8. $\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{8-7x^3}}$
9. $\int_{-1}^1 (5-x-3x^2)dx$
10. $\int_0^2 \frac{x^4dx}{\sqrt{x^5+4}}$
11. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2}\cos xdx$
12. $\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{25-3x^2}dx$
13. $\int_1^8 \left(3-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$
14. $\int_0^1 x^2e^{x^3+1}dx$
15. $\int_1^2 \frac{x-1}{x^3}dx$
16. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos xdx}{\sqrt[3]{(8-7\sin x)^2}}$
17. $\int_{-1}^1 (x^2-2)dx$
18. $\int_1^2 \frac{xdx}{(2x^2+4)^4}$
19. $\int_0^1 (e^x+x)dx$
20. $\int_0^2 \frac{x^2dx}{\sqrt{9+2x^3}}$

3. Приложения определенного интеграла
Вычисление площадей

Фигура, ограниченная кривой *y = f (x)*, осью абсцисс и двумя прямыми, перпендикулярными к оси абсцисс, называется *криволинейной трапецией*. Отрезок [a;b] называется основанием криволинейной трапеции. Различные примеры криволинейных трапеций приведены на рисунках *а – г.*

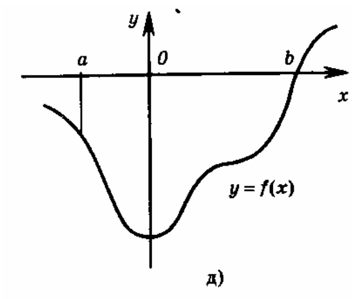
Площадь фигуры, ограниченной кривой $y = f(x)$, где $f(x) > 0$, осью OX и двумя прямыми $x = a$ и $x = b$, выражается определенным интегралом:

$$S = \int_a^b f(x)dx$$



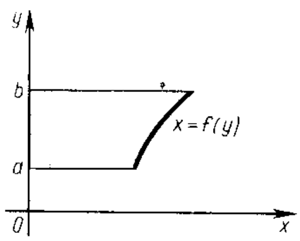
Если фигура, расположенная под осью *OX*, т.е. f (x) < 0, является криволинейной трапецией. То ее площадь вычисляется по формуле

$$S = \left| \int_a^b f(x)dx \right|$$



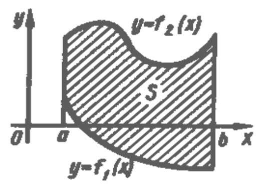
Если криволинейная трапеция прилегает к оси ординат и ограничена непрерывной кривой $x = f(y)$, прямыми $y = a$, $y = b$ и осью OY, то ее площадь вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(y)dy$$



Площадь фигуры, ограниченной графиками непрерывных функций y = $f_1(x)$ и y = $f_2(x)$ (где a ≤ x ≤ b) и отрезками прямых *x = a и x = b*, вычисляется по формуле

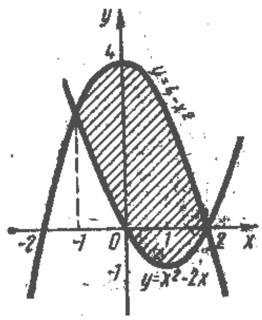
$$S = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx - \int_a^b f_2(x)dx$$



Пример 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболами $y = 4 - x^2$ и $y = x^2 - 2x$.

Решение:

Найдем пределы интегрирования, т.е. абсциссы точек пересечения графиков функций $y = 4 - x^2$ и $y = x^2 - 2x$. Для этого решим систему $\begin{cases} y = 4 - x^2 \\ y = x^2 - 2x \end{cases}$



Имеем $4 - x^2 = x^2 - 2x,\ 2x^2 - 2x - 4 = 0$

$x^2 - x - 2 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}, \quad x_1 = -1,\ x_2 = 2$$

Искомую площадь вычисляем по формуле S = $\int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]dx$

$$S = \int_{-1}^{2} \left(4 - x^2 - x^2 + 2x\right)dx = \int_{-1}^{2} (4 - 2x^2 + 2x)dx = 4\int_{-1}^{2} dx - 2\int_{-1}^{2} x^2 dx + 2\int_{-1}^{2} x dx =$$

$$= 4x\Big|_{-1}^{2} - 2\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2} + 2\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{2} = 4(2+1) - \frac{2}{3}(8+1) + 4 - 1 = 12 - 6 + 3 = 9$$

S = 9 кв.ед.

Задания для самостоятельной работы

Сделайте чертеж и вычислите площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

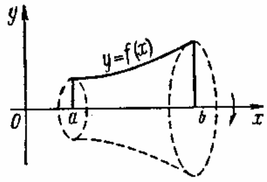
1. $y = 8x - x^2 - 7$ и осью *OX*
2. $y = x^3 - 1$, $y = 0$, $x = 0$
3. $y = x^2 - 3x - 4$ и осью *OX*
4. $y^2 = 4x$ и $x^2 = 4y$
5. . $y = 5x - x^2 + 6$ и осью *OX*
6. $y = x^3$, $y = x^2$, $x = -1$, $x = 0$
7. $y = x^2 - 6x + 8$ и осью *OX*
8. $y = x^2$ и $y = x + 2$
9. $y = x^2 - 4x - 5$ и осью *OX*
10. $y = 6x - 3x^2$ и осью *OX*

Вычисление объема тела вращения

Телом вращения называется тело, полученное вращением криволинейной трапеции вокруг её основания.

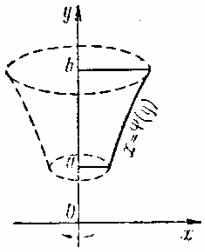
Объем тела, образованного вращением вокруг оси *OX* криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой $y = f(x)$ (где $a \le x \le b$), отрезком *ab* оси *OX* и отрезками прямых $x = a$ и $x = b$, вычисляется по формуле

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$



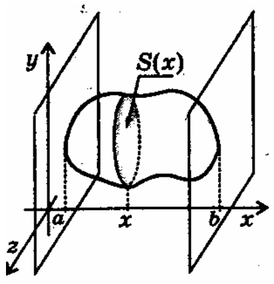
Если основание криволинейной трапеции лежит на оси ординат ($a < b$), то объем тела вращения вычисляется по формуле

$$V = \pi \int_a^b \varphi^2(y)dy$$



Объем тела, заключенного между двумя перпендикулярными к оси *X* плоскостями $x = a$ и $x = b$:

$V = \int_a^b S(x)dx$, где $S(x)$ – площадь сечения плоскостью, проходящей через точку $x \in [a;b]$ и перпендикулярной к оси *X*.

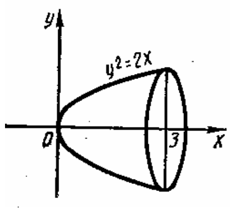


Пример 1. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси *OX* фигуры, ограниченной параболой $y^2 = 2x$, прямой $x = 3$ и осью *OX*.

Решение: Применяя формулу $V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$

$$V = \pi \int_0^3 2xdx = \pi x^2 \Big|_0^3 = \pi(9 - 0) = 9\pi$$

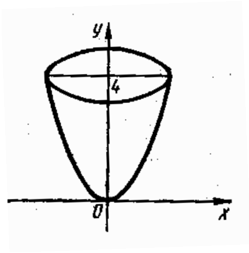
$V = 9\pi$ куб.ед.



Пример 2. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси *OY* фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 + 1$ и прямой $y = 2$.

Решение: объем полученного тела (оно называется параболоидом) вычислим по формуле $V = \pi \int_a^b \varphi^2(y) dy$.

$$V = \pi \int_1^2 (y-1) dy = \pi \int_1^2 y dy - \pi \int_1^2 dy = \pi \frac{y^2}{2}\bigg|_1^2 - \pi y\bigg|_1^2 = \frac{\pi}{2}(4-1) - \pi(2-1) = \frac{3\pi}{2} - \pi = \frac{\pi}{2}$$



$V = \frac{\pi}{2}$ куб.ед.

Задания для самостоятельной работы

Сделайте чертеж и вычислите объем тела, образованного вращением вокруг оси *OX* фигуры, ограниченной данными линиями:

1. $xy = 1, x = 2, x = 3, y = 0$
2. $y = x^3, y = 0, x = 0, x = 2$
3. $y^2 - 3x = 0$ и $x - 3 = 0$
4. $y = \frac{1}{3}x^2, y = 0, x - 3 = 0, x = 0$

Сделайте чертеж и вычислите объем тела, образованного вращением вокруг оси *OУ* фигуры, ограниченной данными линиями:

1. $y = x^2 + 1, y = 2, y = 5$
2. $y = 3 - \frac{1}{3}x^2, y = 2, y = 0$

Применения определенного интеграла к решению физических задач.

Путь, пройденный точкой.

Если точка движется прямолинейно и ее скорость $v = f(t)$ есть известная функция времени *t*,то путь, пройденный точкой за промежуток времени

$t_1 \leq t \leq t_2$,, вычисляется по формуле $S = \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt$

Пример:

Скорость прямолинейно движущегося тела равна $v = (4t - t^2)$ (v – в м/с). Вычислить путь, пройденный телом от начала движения до остановки.

Решение.

В момент остановки скорость движения тела равна нулю, т. е. $4t - t^2 = 0$,

$t(4 - t) = 0$, $t_1 = 0$, $t_2 = 4$.

Итак, тело остановится через 4 с.

Путь, пройденный телом за это время, вычисляем по формуле : $S = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt$

$$S = \int_{0_1}^{4}\left(4t - t^2\right)dt = 4\int_0^4 tdt - \int_0^4 t^2dt = 4\frac{t^2}{2}\Big|_0^4 - \frac{t^3}{3}\Big|_0^4 = 2\cdot 16 - \frac{1}{3}\cdot 64 = 32 - 21\frac{1}{3} = 10\frac{2}{3} \text{ (м).}$$

Задание для самостоятельной работы

Тело движется прямолинейно со скоростью $v = (2 + 4t^3)$ (v – в м/с). Вычислите путь, пройденный телом за первые три секунды.

Контрольная работа

1. Найдите неопределенные интегралы:

1. $\int (4x^2 + 4x - 3)dx$
2. $\int \frac{\sqrt[3]{x} - 3}{\sqrt{x}}dx$
3. $\int \frac{t^2dt}{\sqrt[5]{5 - 2t^3}}$
4. $\int \frac{1 - 6x + 4x^2}{x^2}dx$
5. $\int 3^{2+x^2} xdx$
6. $\int \frac{5 - \sqrt[3]{x^2}}{x}dx$
7. $\int x \cdot 2^{x^2} dx$
8. $\int \frac{x^{-\frac{1}{3}} - 1}{\sqrt[3]{x^2}}$
9. $\int \sqrt[4]{(2 - \sin x)^3} \cos xdx$
10. $\int \left(\frac{x}{3} - \frac{3}{x} + 5e^x\right)dx$
11. $\int \frac{2 - \sqrt[3]{x}}{x\sqrt[3]{x^2}}dx$
16. $\int \frac{xdx}{2\sqrt{x}}$
17. $\int \left(3x^5 - \cos x - 1\right)dx$
18. $\int \left(\frac{2}{\cos^2 x} - \frac{5}{\sin^2 x}\right)dx$
19. $\int (2^x - 3e^x + x)dx$
20. $\int \frac{x^{-\frac{1}{2}} + 2}{\sqrt{x}}dx$
21. $\int \left(\frac{1}{5\cos^2 x} - \frac{x}{2} + \frac{2}{x}\right)dx$
22. $\int \frac{3x^2dx}{\left(2 - x^3\right)^4}$
23. $\int \left(2 - \frac{1}{3\sin^2 x} - x^2\right)dx$
24. $\int \frac{x^2 - 2x + 3}{x\sqrt{x}}dx$
25. $\int \left(5^x - 1\right)\left(5^{-x} + 1\right)dx$
26. $\int \frac{\cos^2 x + 3}{\cos^2 x}dx$

12. $\int \frac{x\sqrt{x} - x^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}}dx$

13. $\int \left(9x^8 - 3e^x + \frac{5}{\cos^2 x}\right)dx$

14. $\int \left(3x^3 - 4\right)^2 x^2 dx$

15. $\int \frac{x^2 dx}{1 + x^3}$

27. $\int \cos^4 x \sin x dx$

28. $\int \frac{7 + 2x\sin^2 x}{\sin^2 x}dx$

29. $\int \frac{\sin 2x dx}{\cos x}$

30. $\int \frac{dx}{\sqrt{(3x+1)^3}}$

2. Найдите определенные интегралы:

1. $\int_1^8 \left(4x - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2}\cos x dx$

3. $\int_0^2 \frac{4x dx}{\sqrt{1 + 2x^2}}$

4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{(2 - \cos x)^2}$

5. $\int_0^8 \left(\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}\right)dx$

6. $\int_0^1 x^2 e^{x^3+1}dx$

7. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - \sin x)dx$

8. $\int_0^4 \left(1 - \sqrt{x}\right)^2 dx$

9. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3 - 2\sin x)^3 \cos x dx$

10. $\int_1^2 \frac{1 - x^6}{x^5}dx$

11. $\int_1^8 \left(3 - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$

16. $\int_6^{6\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2 + 36}$

17. $\int_0^2 (2 - x)^2 dx$

18. $\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{x^4 + 16} \cdot x^3 dx$

19. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{2\cos^2 x}$

20. $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{dx}{\sqrt{4 - 9x^2}}$

21. $\int_0^4 \left(x^2 - 2\sqrt{x}\right)dx$

22. $\int_{-\frac{2}{3}}^0 (4 + 6x)^3 dx$

23. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x}\right)dx$

24. $\int_0^1 \left(5 - 2x^3\right)x^2 dx$

25. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4 + 5\sin x}\cos x dx$

26. $\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt[4]{\left(1 + 15x^2\right)^3}}$

12. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{\sqrt[3]{(8-7\sin x)^2}}$

13. $\int\limits_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{7x^3+1}}$

14. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) dx$

15. $\int\limits_0^1 \frac{6x^2 dx}{1+2x^3}$

27. $\int\limits_1^3 2e^{2x} dx$

28. $\int\limits_1^9 \left(2x-\frac{3}{\sqrt{x}}\right) dx$

29. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} e^{\cos x} \sin x dx$

30. $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{x dx}{2\sqrt{1+x^2}}$

3. Сделайте чертеж и вычислите площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

1) $y = 3x - 1, y = 0, x = 2, x = 4$
2) $x - 2y + 4 = 0, x + y - 5 = 0, y = 0$
3) $y = -\frac{1}{3} x^2 + 3, y = 0, x = 0, x = 3$
4) $y = 9 - x^2, y = 0$
5) $y = 4x - x^2, y = 0$
6) $y = x^2 - 2x + 3, y = 0, x = 0, x = 3$
7) $y = x^2, 5x - y - 6 = 0$
8) $y = x^2, x = y^2$
9) $y = \frac{1}{4} x^2, y = -\frac{1}{2} x^2 + 3x$
10) $y = - x^2 + 6, y = 2x + 3$

4. Сделайте чертеж и вычислите объем тела, образованного вращением вокруг оси *OX* фигуры, ограниченной данными линиями:

1) $y^2 = 6x, y = 0, x = 1, x = 3$
2) $y^2 = 4(x - 2), y = 0, x = 3, x = 6$
3) $y = x^2 - 4, x = 0$
4) $y = \sin x, y = 0, x = 0, x = \pi$
5) $y^2 = 4x, y = x$
6) $y = 4 - x^2, x - y + 2 = 0$

5. Сделайте чертеж и вычислите объем тела, образованного вращением вокруг оси *OY* фигуры, ограниченной данными линиями:

1) $y = x^2, y = 1, y = 4, x = 0$
2) $y = x^2 + 1, y = 5$
3) $y^2 = 9x, y = 3x$
4) $y^2 = 2x, 2x + 2y - 3 = 0$

Используемая литература:

1. Колмогоров А.Н., Абрамов А.М., и др. Алгебра и начала анализа (10-11 кл.) – М., Просвещение., 1997.
2. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике. – М., Высшая школа, 2000.
3. Валуце И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов. М.,1989.
4. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. М., 1977.
5. Рогов А.Т. Задачник по высшей математике для техникумов. – М., Высшая школа, 1973.
6. Филимонова Е. В. Математика, Ростов – на – Дону, Феникс, 2003.