ГБПОУ КК ЛТК

Формулы по алгебре и геометрии

ст. Ленинградская
2018 г.

Условные обозначения.

N – множество всех натуральных чисел.
N_0 – множество всех неотрицательных целых чисел.
Z - множество всех целых чисел.
Q - множество всех рациональных чисел.
R - множество всех действительных чисел.
R^+ - множество всех положительных действительных чисел.
$\Rightarrow$ - следует.
$\Leftrightarrow$ - равносильно.
D(f) –область определения функции y = f(x).
E(f) – множество значений функции y = f(x).
const – постоянная величина.
$\in$ - принадлежит, содержится; например: $x \in R$
x принадлежит множеству действительных чисел, то есть x является действительным числом.

Таблица степеней.

ст. / ч.	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
3	9	27	81	243	729	2187			
4	16	64	256	1024					
5	25	125	625	3125					
6	36	216	1296						
7	49	343	2401						
8	64	512	4096						
9	81	729	6561						
10	100	1000	10000						

Квадрат и квадратный корень.

Степени	Корни
$1^2=1$	$\sqrt{1}=1$
$2^2=4$	$\sqrt{4}=2$
$3^2=9$	$\sqrt{9}=3$
$4^2=16$	$\sqrt{16}=4$
$5^2=25$	$\sqrt{25}=5$
$6^2=36$	$\sqrt{36}=6$
$7^2=49$	$\sqrt{49}=7$
$8^2=64$	$\sqrt{64}=8$
$9^2=81$	$\sqrt{81}=9$
$10^2=100$	$\sqrt{100}=10$
$11^2=121$	$\sqrt{121}=11$
$12^2=144$	$\sqrt{144}=12$
$13^2=169$	$\sqrt{169}=13$
$14^2=196$	$\sqrt{196}=14$
$15^2=225$	$\sqrt{225}=15$
$16^2=256$	$\sqrt{256}=16$
$17^2=289$	$\sqrt{289}=17$
$18^2=324$	$\sqrt{324}=18$
$19^2=361$	$\sqrt{361}=19$
$20^2=400$	$\sqrt{400}=20$
$25^2=625$	$\sqrt{625}=25$

Степени и корни.

Определение степени и корня.

1. Пусть $a \in R,\ n \in N$. Тогда:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n-\text{сомнож.}};$$

$a^0 = 1$, если $a \neq 0$;

$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$, если $a \neq 0$;

0^0 не определено;

$\sqrt[n]{a} = в \Leftrightarrow в^n = a$ и $в > 0$ при n чётном;

$\sqrt[n]{a} = в \Leftrightarrow в^n = a$ при n нечётном.

2. Пусть $a \in R^+; m \in Z, n \in N, n > 1$, тогда:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Правила действий с радикалами.

Пусть $m, n, k \in N; a, b \in R^+$, тогда:

$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$; $\qquad \sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$;

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$; $\qquad \dfrac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\dfrac{a}{b}}$;

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$; $\qquad \sqrt[n]{a+b} < \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}.$

Правила действий со степенями.

Пусть $p, q \notin Q, a, b \in R^+$. Тогда:

$a^p a^q = a^{p+q}$; $\qquad \left(a^p\right)^q = a^{pq}$;

$\dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$; $\qquad (ab)^p = a^p b^p.$

Не приводя определения степени с действительным показателем, отметим, что правила действий с такими степенями «сохраняются», то есть приведённые правила верны и для p,q $\in$ R.

Формулы сокращённого умножения.

Пусть $a, в \in R; n, k \in N, n \geq k$. Тогда:

$(a \pm в)^2 = a^2 \pm 2aв + в^2;$

$(a \pm в)^3 = a^3 \pm 3a^2в + 3aв^2 \pm в^3;$

$a^2 - в^2 = (a - в)(a + в);$

$a^3 - в^3 = (a - в)(a^2 + aв + в^2);$

$a^3 + в^3 = (a + в)(a^2 - aв + в^2);$

$a^n - в^n = (a - в)(a^{n-1} + a^{n-2}в + a^{n-3}в^2 + ... + b^{n-1});$

Решение полных квадратных уравнений.

Правило:

$\boldsymbol{ax^2 + вx + c = 0}$

$\mathbf{D = в^2 - 4 \cdot a \cdot c}$

1) если **D > 0**, то уравнение имеет 2 различных корня:

$$x_1 = \frac{-в + \sqrt{D}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-в - \sqrt{D}}{2a}$$

2) если **D = 0**, то уравнение имеет 2 одинаковых корня:

$$x_{1,2} = \frac{-в}{2a}$$

3) если **D < 0**, то уравнение действительных корней не имеет.

Разложение квадратного трёхчлена на множители.

$$\mathbf{ax^2 + вx + c = a(x - x_1)(x - x_2),}$$

где x_1 и x_2 – корни уравнения

Теорема Виета.

$x_1 + x_2 = -p; \quad x_1 \cdot x_2 = q,$ когда $x^2 + px + q = 0$;

$x_1 + x_2 = -\frac{в}{a}; \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$, когда $ax^2 + вx + c = 0$.

Прогрессии.

Арифметическая прогрессия.

Арифметической прогрессией называется такая последовательность чисел, при которой каждый член, начиная со второго, равняется предыдущему, сложенному с одним и тем же, постоянным для этого ряда числом.

Если a_n есть *n* –й член, *d*- разность и s_n – сумма *n* первых членов арифметической прогрессии, то

$$a_n = a_1 + d(n-1), \qquad a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{(2a_1 + d(n-1))n}{2},$$

Геометрическая прогрессия.

Геометрической прогрессией называется такая последовательность чисел, при которой каждый член, начиная со второго, равняется предыдущему, умноженному на одно и то же число, постоянное для данной последовательности.

Если $в_n$ есть *n*-й член, *q*- знаменатель и S_n – сумма *n* первых членов геометрической прогрессии, то

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1},$$

$$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1} = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1},$$

$$b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}.$$

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия.

Если S есть сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии ($|q| < 1$), то $S = \frac{b_1}{1 - q}$.

Логарифмы.

Логарифмом числа b по основанию a называется степень (х) в которую нужно возвести основание a, чтобы получить число b.

Пусть $a^x = b \quad b > 0,\ a > 0, a \neq 1,\ \ x = \log_a b.$

1.Основное логарифмическое тождество:

$$a^{loq_a x} = x, \text{ для } x>0;$$

2. Логарифм произведения, частного и степени:

$$loq_a(xy) = loq_a x + loq_a y, (x, y) > 0;$$

$$loq_a\left(\frac{x}{y}\right) = loq_a x - loq_a y, (x, y) > 0;$$

$$loq_a x^p = ploq_a x, x^p > 0.$$

3. Модуль перехода к новому основанию. Пусть b>0, b$\neq$1, x>0.

Тогда: $loq_a x = \dfrac{loq_b x}{loq_b a},$

в частности, $\log_a x = \dfrac{1}{loq_x a},$ при x$\neq$1.

4. $loq_{a^p} b = \dfrac{1}{p} loq_{|a|} b, a^p > 0, a^p \neq 1.$

5. $a^{loq_b c} = c^{loq_b a}.$

6. Десятичный и натуральный логарифмы:

$loq_{10} x = lqx; \qquad loq_e x = \ln x,$ где

e=2,71828…

Логарифмические и показательные уравнения и неравенства обычно решаются путём приведения всех выражений, содержащих логарифмические и показательные функции, к одному основанию и последующей замены неизвестной, сводящей задачу к решению алгебраического уравнения или неравенства.

При решении неравенств используют свойства:

1) $a^x > a^y \begin{cases} x > y - при..a > 1; \\ x < y - при..0 < a < 1. \end{cases}$

2) $Loq_a x > Loq_a y \Leftrightarrow \begin{cases} x > y - при..a > 1; \\ x < y - при..0 < a < 1. \end{cases}$

Модуль и его свойства.

1. Определение модуля числа.

$$|x| = \begin{cases} x; если..x > 0; \\ 0, если..x = 0; \\ -x, если..x < 0; \end{cases} \qquad \text{или} \qquad |x| = \begin{cases} x, если..x \geq 0; \\ -x, если..x < 0. \end{cases}$$

2. Геометрически $|x|$ есть расстояние от точки х числовой оси до начала отсчёта – точки О.

3. $|x - a|$ есть расстояние между точками х и a числовой оси.

4. Модуль произведения, частного и степени.

$$|xy| = |x| \cdot |y|; \qquad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, y \neq 0$$

$$|x^n| = |x|^n, n \in \mathrm{Z}, x^2 + n^2 \neq 0.$$

Извлечение квадратного корня из квадрата.

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a, когда...a > 0; \\ -a, когда...a < 0; \\ 0, когда...a = 0. \end{cases}$$

$$\sqrt{(à - â)^2} = |à - â| = \begin{cases} à - â, êîãäà...à > â; \\ -(à - â), êîãäà...à < â; \\ 0, êîãäà...à = â. \end{cases}$$

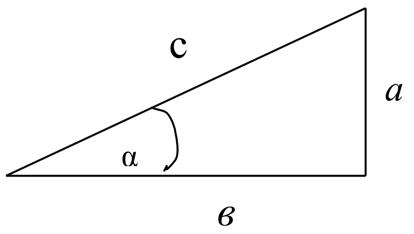
Тригонометрия. Радианное измерение углов.

Определение: Один радиан равен центральному углу, длина дуги которого равна радиусу этой окружности.

1 радиан $= \dfrac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ 17' 45''.$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180^\circ}\ радиана \approx 0{,}017453\ радиана..$$

Соотношения сторон и углов в прямоугольном треугольнике.



$$\sin\ \alpha\ =\ \frac{a}{c};$$

$$\cos\ \alpha\ =\ \frac{в}{c};$$

$$tg\ \alpha\ =\ \frac{a}{в};$$

$$ctg\ \alpha\ =\ \frac{в}{a}.$$

Основные тригонометрические тождества.

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$; $\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x}$; $\sin x = \pm\sqrt{1-\cos^2 x}$;

$tgx \cdot ctgx = 1$ для $x \neq \frac{\pi}{2}k,\ k \in Z$;

$1 + tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x},\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$; $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$;

$1 + ctg^2 x = \frac{1}{\sin^2 x},\ x \neq \pi k,\ k \in Z$. $ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Формулы суммы и разности аргументов.

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y;$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y;$$

$$tg(x \pm y) = \frac{tgx \pm tgy}{1 \mp tgx \cdot tgy};$$

Формулы двойного и тройного аргументов.

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1;$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x;$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}; \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2};$$

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x; \quad \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x;$$

$$tg 2x = \frac{2tgx}{1-tg^2 x}; \qquad tg 3x = \frac{3tgx - tg^3 x}{1-3tg^2 x}.$$

Тригонометрические функции отрицательного аргумента.

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha;$$

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha;$$

$$tg(-\alpha) = -tg\alpha;$$

$$ctg(-\alpha) = -ctg\alpha.$$

Таблица значений тригонометрических функций.

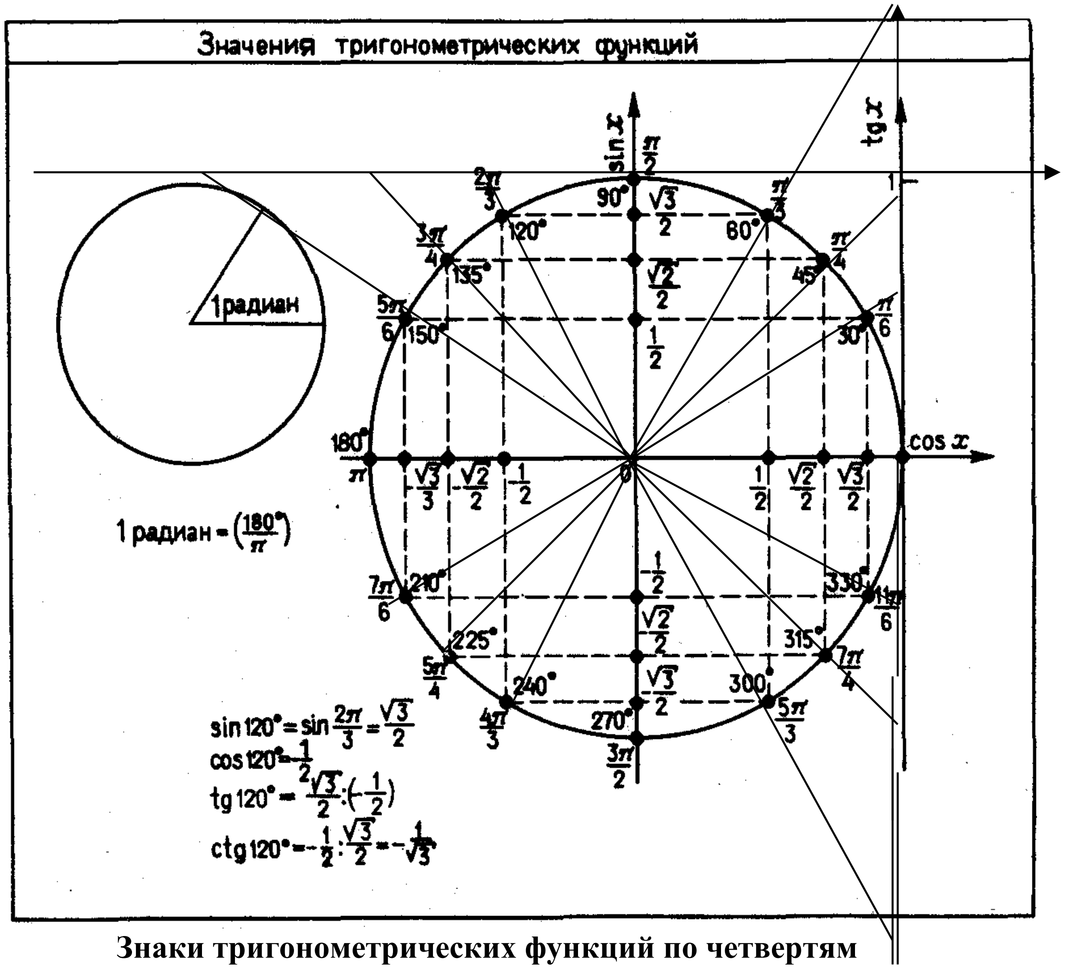
α	0 0^o	$\frac{\pi}{6}$ 30^o	$\frac{\pi}{4}$ 45^o	$\frac{\pi}{3}$ 60^o	$\frac{\pi}{2}$ 90^o	$\frac{2\pi}{3}$ 120^0	$\frac{3\pi}{4}$ 1 35^0	$\frac{5\pi}{6}$ 150^0	π 180	$\frac{3\pi}{2}$ 270^o
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0
tg α	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0-	-
ctg α	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$-	-	0

Формулы половинного аргумента.

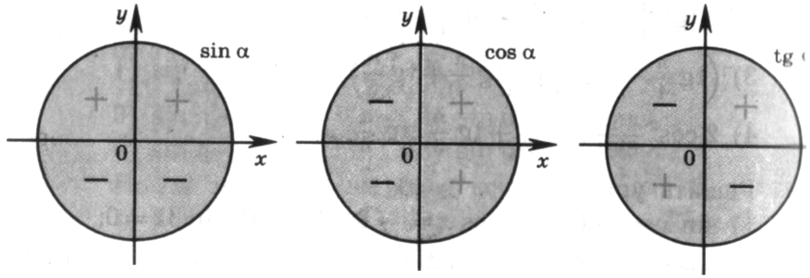
$$\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}; \qquad \cos^2\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2};$$

$$tg\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x};\ \ x \neq \pi + 2\pi n, n \in Z,$$

$$tg\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{\sin x}, x \neq \pi n, n \in Z.$$



Знаки тригонометрических функций по четвертям



Формулы преобразования произведения в сумму.

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y)-\cos(x+y));$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x-y)+\cos(x+y));$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x-y)+\sin(x+y)).$$

Соотношения между sinx, cosx и tg $\frac{x}{2}$.

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}, x \neq (2n+1)\pi,\ n \in Z;$$

$$\cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}, x \neq (2\pi+1)n, n \in Z.$$

Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного угла.

Если $x \neq \pi + 2\pi k, k \in Z$, то

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}; \quad \cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}; \quad tgx = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1-tg^2\frac{x}{2}}.$$

Преобразование суммы и разности тригонометрических функций в произведение.

$$\sin x \pm \sin y = 2\cdot\sin\frac{x\pm y}{2}\cdot\cos\frac{x\mp y}{2};$$

$$\cos x + \cos y = 2\cdot\cos\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2};$$

$$\cos x - \cos y = 2\cdot\sin\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{y-x}{2};$$

$$tgx \pm tgy = \frac{\sin(x\pm y)}{\cos x\cdot\cos y};$$

$a\cdot\sin x + b\cdot\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sin(x+\varphi)$, где $a^2+b^2\neq 0$, а φ определяется из формулы $\sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}};\cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}};$

$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\cos(x-\alpha)$, где $a^2+b^2\neq 0$, а α определяется из формулы $\sin\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}};\cos\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$

Формулы приведения.

угол	**sin**	**cos**	**tg**	**ctg**
$\pm\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\pm tg\alpha$	$\pm ctg\alpha$
$\frac{\pi}{2}\pm\alpha$	$\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$\mp ctg\alpha$	$\mp tg\alpha$
$\pi\pm\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm tg\alpha$	$\pm ctg\alpha$
$\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$\mp ctg\alpha$	$\mp tg\alpha$
$2\pi\pm\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\pm tg\alpha$	$\pm ctg\alpha$

$$\pi = 3\pi = 5\pi = 7\pi = 9\pi\ldots$$

$$2\pi = 4\pi = 6\pi = 8\pi\ldots$$

Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму.

$$\sin x\cdot\sin y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y)-\cos(x+y)\right);$$

$$\cos x\cdot\cos y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y)+\cos(x+y)\right);$$

$$\sin x\cdot\cos y = \frac{1}{2}\left(\sin(x-y)+\sin(x+y)\right).$$

Определение обратных тригонометрических функций.

$y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y$ и $\frac{-\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2};$

$y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y$ и $0\le y\le\pi;$

$y = arctgx \Leftrightarrow x = tgy$ и $\frac{-\pi}{2}< y<\frac{\pi}{2};$

$y = arcctgx \Leftrightarrow x = ctgy$ и $0< y<\pi.$

Свойства обратных тригонометрических функций.

$$D(\arcsin x) = [-1;1];\quad E(\arcsin x) = \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right];$$

$$D(\arccos x) = [-1;1];\quad E(\arccos x) = [0;\pi];$$

$$D(arctgx) = R;\quad E(arctgx) = \left(\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right);$$

$$D(arcctgx) = R;\quad E(arcctgx) = (0;\pi);$$

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x;\quad \arccos(-x) = \pi - \arccos x;$$

$$arctg(-x) = -arctgx;\quad arcctg(-x) = \pi - arcctgx;$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, если\ x \in [-1;1];$$

$$arctgx + arcctgx = \frac{\pi}{2};$$

$\sin(\arcsin x) = x$; если $x \in [-1;1]$;

$\arcsin(\sin x) = x_\circ$, где $x_\circ \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ и $\sin x_\circ = \sin x$;

$\cos(\arccos x) = x$; если $x \in [-1;1]$;

$\arccos(\cos x) = x_\circ$, где $x_\circ \in [0;\pi]$ и $\cos x_\circ = \cos x$;

$tg(arctgx) = x,\ ctg(arcctgx) = x$;

$arctg(tgx) = x_\circ$, где $x_\circ \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ и $tgx_\circ = tgx$;

$arcctg(ctgx) = x_\circ$, где $x_\circ \in (0;\pi)$ и $ctgx_\circ = ctgx$.

Формулы для решения простейших тригонометрических уравнений.

$\sin x = a;\ |a| \le 1;\ x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in Z;$

$\sin x = -a;\ x = (-1)^{n+1} \arcsin \grave{a} + \pi n,\ n \in Z;$

$\sin x = 0;\ \ x = \pi k;\ \ k \in Z;$

$\sin x = 1;\ \ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ \ k \in Z;$

$\sin x = -1;\ \ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \ k \in Z;$

$\cos x = a;\ |a| \le 1;\ x = \pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in Z;$

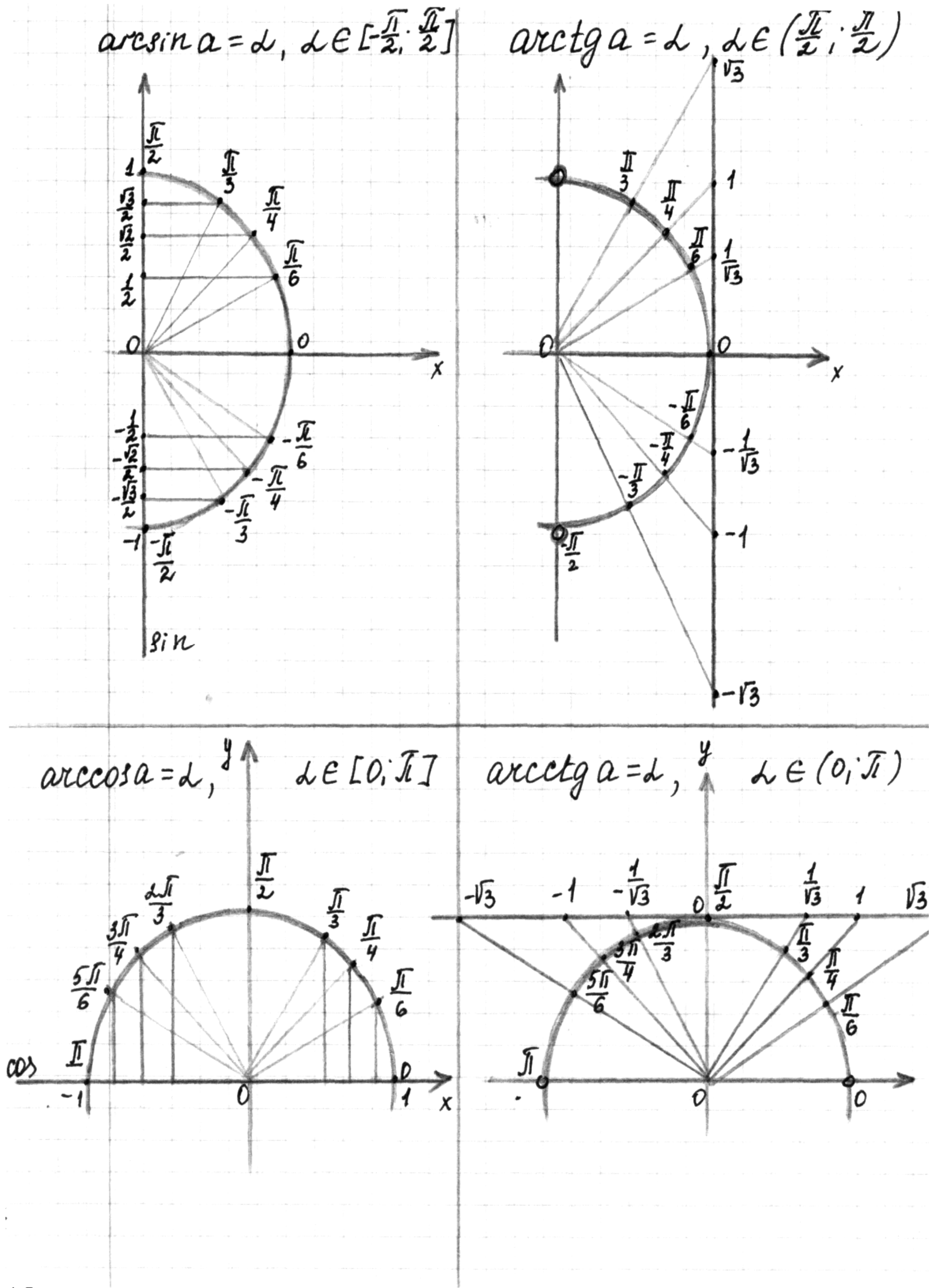
$\cos x = 0;\ \ x = \frac{\pi}{2} + \pi k;\ \ k \in Z;$

$\cos x = 1;\ \ x = 2\pi k,\ \ k \in Z;$

$\cos x = -1;\ x = \pi + 2\pi k,\ k \in Z;$

$tgx = a;\ x = arctga + \pi n;\ n \in Z;$

$ctgx = a;\ x = arcctga + \pi n;\ n \in Z.$



Область определения - D(f) и множество значений - E(f) некоторых элементарных функций.

$D\left(\frac{1}{x}\right)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$, $E\left(\frac{1}{x}\right)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$,

$D\left(\sqrt[2k]{x}\right)=[0;+\infty)$, $E\left(\sqrt[2k]{x}\right)=[0;+\infty)$,

$D\left(\sqrt[2k+1]{x}\right)=R$, $E\left(\sqrt[2k+1]{x}\right)=R$,

$D(\log_a x)=(0;+\infty)$, $E(\log_a x)=R$,

$D(a^x)=R$, $E(a^x)=(0;+\infty)$,

$D(\sin x)=R$, $E(\sin x)=[-1;1]$,

$D(\cos x)=R$, $E(\cos x)=[-1;1]$,

$D(\arcsin x)=[-1;1]$, $E(\arcsin x)=\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$,

$D(\arccos x)=[-1;1]$, $E(\arccos x)=[0;\pi]$,

$D(tgx)=(-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\frac{\pi}{2}+2\pi k)\cup$
$\cup(\frac{\pi}{2}+2\pi k;\frac{3\pi}{2}+2\pi k), k\in Z.$ $E(tgx)=R$,

$D(ctgx)=(2\pi k;\pi+2\pi k)\cup$
$\cup(\pi+2\pi k;2\pi+2\pi k), k\in Z.$ $E(ctgx)=R$,

$D(arctgx)=R$, $E(arctgx)=(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$,

$D(arcctgx)=R$, $E(arcctgx)=(0;\pi)$.

Таблица производных основных элементарных функций.

$(C)'=0 \quad (C-const);$ $\quad (x)'=1;$

$(x^n)'=n\cdot x^{n-1};$ $\quad (\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}};$

$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2};$ $\quad (\sin x)'=\cos x;$

$(\cos x)'=-\sin x;$ $\quad (tgx)'=\frac{1}{\cos^2 x};$

$(ctgx)'=-\frac{1}{\sin^2 x};$ $\quad (a^x)'=a^x\ln a;$

$(e^x)'=e^x;$ $\quad (\log_a x)'=\frac{1}{x\cdot\ln a};$

$(\ln x)'=\frac{1}{x};$ $\quad (\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$

$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$ $\quad (arctgx)'=\frac{1}{1+x^2};$

$(arcctgx)'=-\frac{1}{1+x^2}.$

Основные правила дифференцирования.

$(c\cdot u)'=c\cdot u', c-const;$ $\quad (u\pm v)'=u'\pm v';$

$(u\cdot v)'=u'v+v'u;$ $\quad \left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2};$

Производные сложных функций.

$y=f(g(x)),\quad y'=f_u'(u)\cdot g_x'(x,)$ где $u=g(x)$.

$(u^n)'=nu^{n-1}\cdot u';$ $\quad (\sqrt{u})'=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u';$

$\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{1}{u^2}\cdot u';$ $\quad (e^u)'=e^u\cdot u';$

$(a^u)'=a^u\ln a\cdot u';$ $\quad (\ln u)'=\frac{1}{u}\cdot u';$

$(\log_a u)'=\frac{1}{u\ln a}\cdot u';$ $\quad (\sin u)'=\cos u\cdot u';$

$$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'; \qquad (tgu)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u';$$

$$(ctgu)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'; \qquad (\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u}} \cdot u';$$

$$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'; \qquad (arctgu)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u';$$

$$(arcctgu)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'.$$

Геометрический смысл производной.

$f'(x_0)$ является угловым коэффициентом касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0. Напомним, что угловой коэффициент прямой равен тангенсу угла, образованного этой прямой с положительным направлением оси Ох.

$f'(x_0) = \kappa = tg\alpha; \quad \alpha = arctg\kappa.$

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ ***в точке*** x_0***:***

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$

Механический смысл производной.

Пусть S = S(t) – уравнение зависимости пути от времени при движении какого-то тела.

Тогда $S'(t) = U(t)$ – скорость движения этого тела в момент времени t.

$S''(t) = U'(t) = a(t)$ – ускорение движущегося тела в момент времени t.

Применения производной.

Если $f'(x) > 0$ на промежутке, то $f(x)$ возрастает на этом промежутке.

Если $f'(x) < 0$ на промежутке, то $f(x)$ убывает на этом промежутке.

Если $f'(x) = 0$ на промежутке, то $f(x)$ =С (константа) на этом промежутке.

Критические точки функции находят из условия $f'(x) = 0$ или $f'(x)$ не существует на области определения функции.

Если в точке x_0 производная меняет знак, то x_0 - точка экстремума. При изменении знака производной с «+» на «-» x_0- точка максимума, а с «-» на «+» x_0 – точка минимума.

Если $f(x)$ дифференцируема на промежутке то $f(x)$ непрерывна на этом промежутке.

Первообразная и интеграл.

F(x) – первообразная для $f(x)$ на множестве X, если $F'(x) = f(x)$ для всех $x \in X$ (определение первообразной).

Если F(x) – первообразная для $f(x)$ на множестве X, то F(x)+C – множество всех первообразных для $f(x)$ на множестве X (это множество первообразных называют неопределённым интегралом и обозначают: $\int f(x)dx = F(x) + C$).

Таблица первообразных для элементарных функций.

$F(x^n) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1).$ $\qquad F\left(\frac{1}{x}\right) = Ln|x| + c$:

$F\left(\frac{1}{x}\right) = Lnx + c,$ при x>0; $\qquad F\left(\frac{1}{x}\right) = Ln(-x) + c,$ при x<0.

$F(\sin x) = -\cos x + c.$ $\qquad F(\cos x) = \sin x + c.$

$F\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right) = tgx + c.$ $\qquad F\left(\frac{1}{\sin^2 x}\right) = -ctgx + c.$

$F(a^x) = \frac{a^x}{Lna} + c.$ $\qquad F(e^x) = e^x + c.$

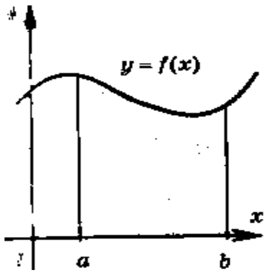
$F\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = arctgx + c.$ $\qquad F\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \arcsin x + c.$

$\frac{1}{k}F(kx+b)$ есть первообразная для функции $f(kx+b)$.

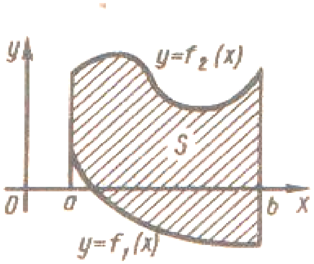
Применение первообразной.

1. Пусть функция f(x) имеет первообразную на отрезке [a;b], причём, на этом отрезке [a;b]   0. Обозначим через S площадь фигуры

(криволинейной трапеции), ограниченной графиком функции y = f(x), осью Ox и прямыми x = a и x = b. Тогда: S = F(b) – F(a), где F(x) – одна из первообразных для f(x).
Формула Ньютона – Лейбница для непрерывной функции f на промежутке: [a;b] $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

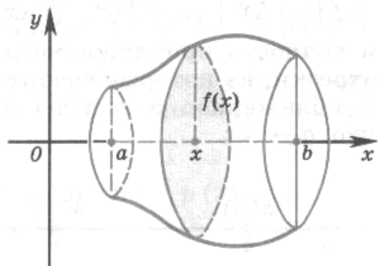


2. Площадь S, ограниченной прямыми $x = a$, $x = b$ и графиками непрерывных на промежутке [a;b] функций f(x) и g(x), таких что f(x) > g(x) для всех $x \in [a;b]$, вычисляется по формуле: $S = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)dx$.

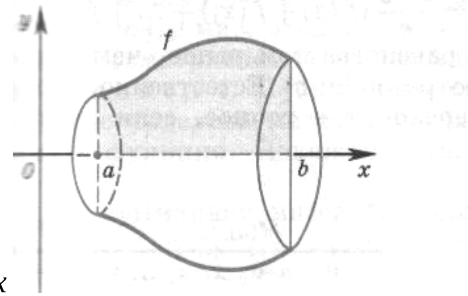


3. Если $S(x)$ площадь поперечного сечения плоскостью, перпендикулярной оси Ox, то объём тела, заключённого между плоскостями $x = a$ и $x = b$, равен

$V = \int_a^b S(x)dx$, $(a \le b)$.



4. Объём тела вращения



$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$

Планиметрия.

1. **Высота треугольника,** проведённая к стороне b, обозначается h_b и выражается через стороны этого треугольника:

$$h_b = \frac{2\sqrt{p(p-b)(p-c)(p-a)}}{b},$$

где $p = \frac{a+b+c}{2}$ – *полупериметр*.

2. **Медианы треугольника** пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении 2:1 начиная от вершины. Через стороны треугольника медиана выражается так: $m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$.

3. **Биссектрисы треугольника** пересекаются в одной точке, являющейся центром вписанной окружности. Биссектриса треугольника делит сторону на части, пропорциональные двум другим сторонам. Через стороны треугольника биссектриса n_b выражается так: $n_b = \frac{2}{a+c}\sqrt{acp(p-b)}$.

4. **Теорема синусов**. Во всяком треугольнике отношение любой стороны к синусу противолежащего угла равно двум радиусам описанной окружности: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$.

5. **Теорема косинусов**. Во всяком треугольнике квадрат любой стороны равен сумме квадратов двух других его сторон минус

удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A.$

6. **Площадь треугольника:**

а) $S = \frac{1}{2}ah;$ б) $S = \frac{1}{2}ab \cdot \sin C;$

в) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ – ***формула Герона.***

г) $S = pr,$ где r – радиус вписанной окружности;

д) $S = \frac{abc}{4R},$ где R – радиус описанной окружности.

7. **В прямоугольном треугольнике**:

а) квадрат высоты, опущенный из вершины прямого угла, равен произведению отрезков гипотенузы, на которые делит гипотенузу основание высоты;

б) квадрат катета равен произведению гипотенузы на проекцию этого катета на гипотенузу.

в) **теорема Пифагора**: квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов: $c^2 = a^2 + b^2$.

г) **радиус описанной окружности** равен половине гипотенузы $R = \frac{c}{2}.$

д) в прямоугольном треугольнике катет лежащий против угла в 30^o равен половине гипотенузы.

8. **Радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника:**

$r = \frac{S}{p};$ $R = \frac{abc}{4S}.$

9. Пусть из точки, лежащей вне окружности, проведены к ней **секущая и касательная**. Тогда произведение секущей на её внешнюю часть равно квадрату касательной.

10. Пусть через точку, лежащую внутри окружности проведены **две хорды**. Тогда произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой.

11.**Четырёхугольники:**

а)**Площадь произвольного четырёхугольника** равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними:

$S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \cdot \sin\alpha;$

б) **Площадь прямоугольника** рана произведению длины на ширину: $S = a \cdot b,$ а **периметр** $P = 2(a+b).$ **Радиус описанной окружности** равен половине диагонали $R = \frac{d}{2}.$

в) **Площадь квадрата**: $S = a^2,$

а периметр $P = 4a.$ Радиус описанной окружности: $R = \frac{a}{\sqrt{2}}.$ Радиус вписанной окружности: $r = \frac{a}{2}.$

г) **Площадь параллелограмма** равна произведению высоты и стороны, к которой опущена эта высота: $S = h \cdot a,$

и площадь равна произведению сторон на синус угла между ними: $S = a \cdot b \cdot \sin C,$

а периметр $P = 2(a+b).$

д) **Площадь ромба** равна половине произведения диагоналей:

$S = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} = h \cdot a = a^2 \cdot \sin\alpha.$

12. **Площадь трапеции**: $S = \frac{1}{2}(a+b) \cdot h,$ где a, b - параллельные стороны трапеции, h – её высота.

$m = \frac{a+b}{2}$ - средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме. $S = mh.$

13. **Площадь круга:** $S = \pi R^2.$

14. **Длина окружности**: $L = 2\pi R.$

15. **Площадь кругового сектора** с углом α :

$S = \frac{1}{2}R^2\alpha,$ если α в радианах; $S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ},$ если α в градусах.

16. **Площадь кругового сегмента** с углом в α в радианах:
$S = \frac{1}{2}R^2(\alpha - \sin\alpha)$.

17. **Сумма внутренних углов** выпуклого *n* – угольника:
$\alpha = 2d(n-2)$, где d – величина прямого угла (в радианах или в градусах).

18. В **правильном треугольнике** со стороной *a*:
$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$; $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$; $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

19. Пусть a_n - сторона **правильного *n* – угольника,** а r_n b R_n – радиусы вписанной и описанной окружности, тогда:
$a_n = 2R \cdot \sin\frac{180^\circ}{n}$; $a_n = 2tg\frac{180^\circ}{n} \cdot r_n$; $r_n = R_n \cos\frac{180^\circ}{n}$.

20. **Формула Герона** для четырёхугольника, около которого можно описать окружность: $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$. где a,b,c,d – стороны этого четырёхугольника, p- полупериметр, а S – площадь.

Стереометрия.

1. **Площадь поверхности конуса**:
боковая: $S_б = \pi R\ell$, где ℓ – образующая;
полная: $S_п = \pi R(R+\ell)$.
Объём конуса: $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$.

2. **Площадь поверхности усечённого конуса**:
боковая: $S_б = \pi(R+r)\ell$;
полная: $S_п = \pi(R+r) + \pi(R^2+r^2)$.
Объём: $V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + Rr + r^2)$. Где ℓ - образующая, R и r – радиусы оснований, h – высота.

3. **Площадь поверхности шара**: $S = 4\pi R^2$.

4. **Объём шара**: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

5. **Площади поверхности цилиндра**:
боковой $S_б = 2\pi Rh$, ***полной***: $S_п = 2\pi R(h+R)$.

6. **Объём цилиндра**: $V = \pi R^2 h$..

7. **Объём пирамиды**: $V = \frac{1}{3}S_{осн} \cdot h$, $V = \frac{1}{3}r_ш \cdot S_{п.п.}$,
где $r_ш$ – радиус вписанного шара, а $S_{п.п}$ – площадь полной поверхности пирамиды, h – высота пирамиды, $S_{осн}$ – площадь основания.

8. **Правильная треугольная пирамида (правильный тетраэдр)**.
Объём - $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{12}$,
площадь полной поверхности - $S = a^2\sqrt{3}$,
высота - $h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$,
радиус описанной сферы - $R = \frac{a\sqrt{6}}{4}$,
радиус вписанной сферы - $r = \frac{a\sqrt{6}}{12}$.

9. **Объём усечённой пирамиды**: $V = \frac{1}{3}h(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$.

11. **Объём усечённого конуса:** $V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + Rr + r^2)$.

10. В пирамиде и в конусе **площади сечений**, параллельных основанию относятся как квадраты их расстояний до вершины.

11. Если все углы пирамиды, образованные боковыми гранями (рёбрами) одинаковы, то в основание (около основания) пирамиды можно **вписать (описать) окружность**, в центр которой попадает высота пирамиды.

12. **Прямоугольный параллелепипед:**

Площадь боковой поверхности:

$S_{Б.п.} = h \cdot P_{осн} = 2h \cdot (a+b).$

Площадь полной поверхности: $S_{п.п} = 2h(a+b) + 2ab.$

Объём - $V = abc.$

Квадрат любой диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трёх его линейных измерений:

$d^2 = a^2 + b^2 + h^2,$

где a – ширина, b – длина, h – *высота*, d – *диагональ*.

Расстояние между диагональю прямоугольного параллелепипеда и скрещивающейся диагональю его основания вычисляется по формуле:

$d = \dfrac{abh}{\sqrt{4a^2b^2 + h^2(a^2+b^2)}}$, где $a, b -$ стороны основания, а h – высота параллелепипеда.

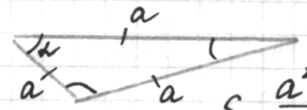
13. ***Площадь полной поверхности куба:*** $S_n = 6a^2.$

Объём куба: $V = a^3.$

Диагональ куба: $d = a\sqrt{3}.$

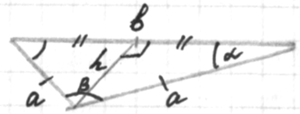
Основания пирамид и призм.

1. Равносторонний △



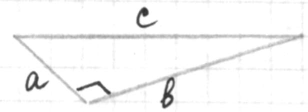
$S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

2. Равнобедренный



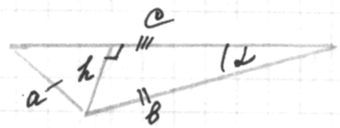
$S_1 = \dfrac{h \cdot b}{2}$; $S_2 = \dfrac{a^2 \sin\beta}{2}$

3. Прямоугольный △



$S = \dfrac{a \cdot b}{2}$

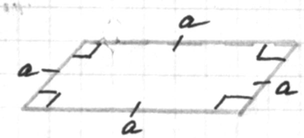
4. Произвольный △



$S_1 = \dfrac{c \cdot b \cdot \sin\alpha}{2}$;

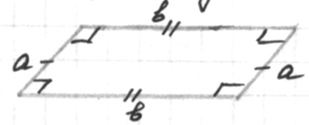
$S_2 = \dfrac{h \cdot c}{2}$

1. Квадрат



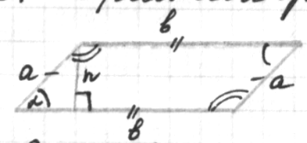
$S = a^2$

2. Прямоугольник



$S = a \cdot b.$

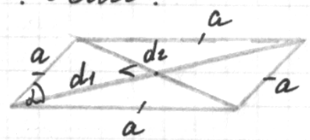
3. Параллелограмм



$S_1 = a \cdot b \cdot \sin\alpha$

$S_2 = h \cdot b$

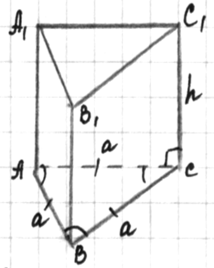
4. Ромб.



$S_1 = a^2 \cdot \sin\alpha$

$S_2 = \dfrac{d_1 \cdot d_2}{2}$

1. Прямая призма, в основании равносторонний Δ.

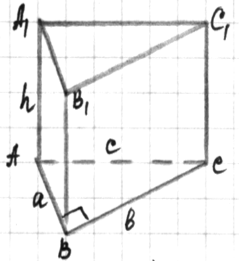


$S_{б.п.} = P_{осн}\cdot h = 3a\cdot h$

$S_{п.п} = 3a\cdot h + 2S_{осн} = 3ah + \frac{\sqrt{3}a^2}{2}$

$V = S_{осн}\cdot h = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}\cdot h$

2. Прямая призма, в основании прямоугольный Δ.

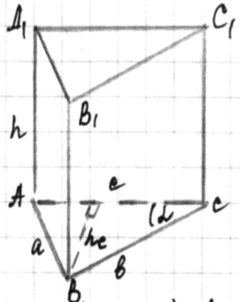


$S_{б.п} = h\cdot(a+b+c)$

$S_{п.п} = h\cdot(a+b+c) + a\cdot b$

$V = \frac{a\cdot b\cdot h}{2}$

3. Прямая призма, в основании произвольный Δ.



$S_{б.п} = (a+b+c)\cdot h$

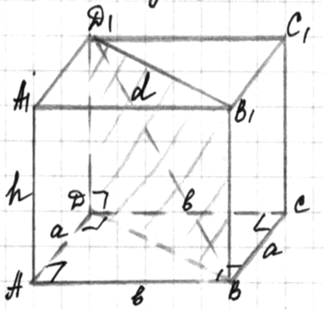
$S_{п.п} = (a+b+c)\cdot h + 2S_{осн}$

$V = S_{осн}\cdot h$

$S_{1\Delta} = \frac{1}{2}h_c\cdot c$

$S_{2\Delta} = \frac{1}{2}b\cdot c\cdot\sin\alpha$

4. Прямая призма, в основании прямоугольник (Прямоугольный параллелепипед).



$S_{б.п} = 2(a+b)\cdot h$

$S_{п.п} = 2(a+b)\cdot h + 2ab$

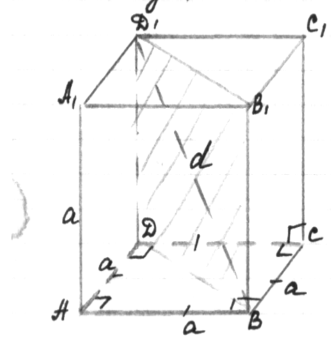
$V = a\cdot b\cdot h$

$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$

d – диагональ (D_1B)

D_1B_1BD – диагональное сечение (прямоугольник)

5. Куб.



$S_{б.п} = 4a^2$

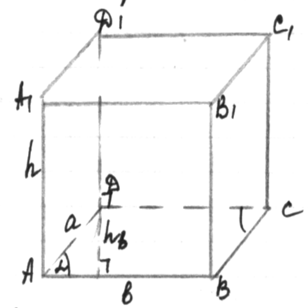
$S_{п.п} = 6a^2$

$V = a^3$

$d^2 = 3a^2$; $d = a\sqrt{3}$

$S_{диаг.сеч.} = \sqrt{2}\cdot a^2$

6. Прямая призма, в основании параллелограмм.



$S_{б.п} = 2(a+b)\cdot h$

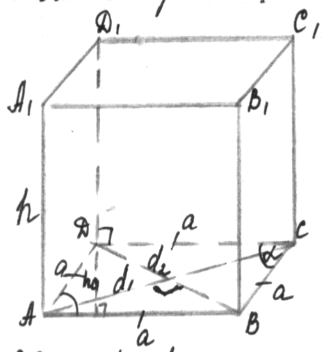
$S_{п.п} = 2(a+b)\cdot h + 2S_{осн}$

$V = S_{осн}\cdot h$

$S_{осн1} = a\cdot b\sin\alpha$

$S_{осн2} = h_b\cdot b$

7. Прямая призма, в основании ромб.



$S_{б.п} = 4a\cdot h$

$S_{п.п} = 4a\cdot h + 2S_{осн}$

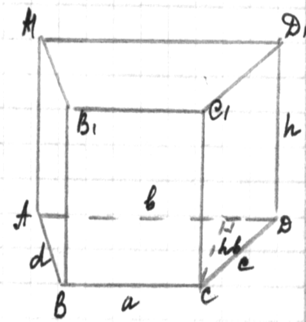
$V = h\cdot S_{осн}$

$S_{осн1} = \frac{d_1\cdot d_2}{2}$

$S_{осн2} = a^2\cdot\sin\alpha$

$S_{осн3} = a\cdot h_a$

8. Прямая призма, в основании трапеция.

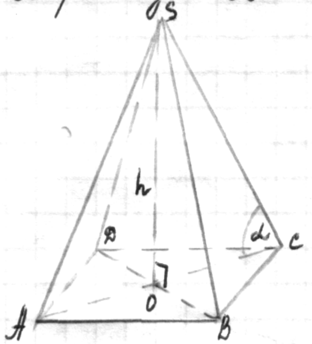


$S_{б.п} = (a+b+c+d)\cdot h$

$S_{п.п} = S_{б.п} + \frac{a+b}{2}\cdot h_b$

$V = \frac{a+b}{2}\cdot h_b\cdot h$

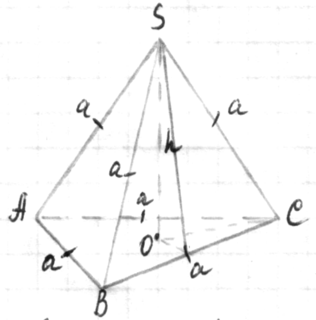
Пирамида SABCD



$V = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot h$

Правильный тетраэдр.

(все ребра равны, все грани равные правильные треугольники.)

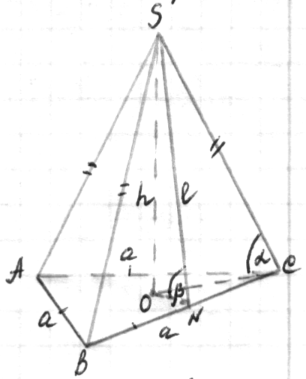


$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$; $h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

$S_{п.п} = a^2\sqrt{3}$

Правильная треугольная пирамида SABC

△ABC - правильный



$l = SN$ - высота бок. грани (апофема).

$\angle\alpha = \angle SCO$ - угол между ребром и основанием

$\angle\beta - \angle SNO$ - угол между бок. гранью и основанием.

$ON = r$ - радиус впис. окружн.

$OC = R$ - радиус опис. окружн.

$S_{б.п} = \frac{3l \cdot a}{2}$

$S_{п.п} = S_{б.п} + S_{осн} = $

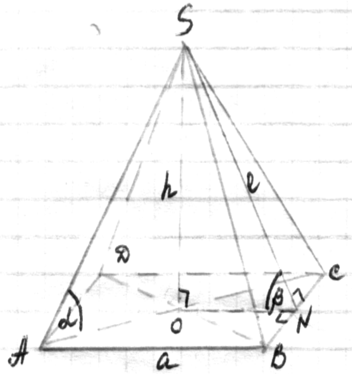
$= \frac{3la}{2} + \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$

$V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h = $

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}a^2}{4} = \frac{a^2}{4\sqrt{3}}$

$r = \frac{a}{2\sqrt{3}}$; $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$

Правильная четырехугольная пирамида SABCD



ABCD - квадрат.

$\angle SAO = \angle\alpha$ - угол между ребром и основанием.

$\angle SNO = \angle\beta$ - угол между бок. гранью и основанием.

$ON = r = \frac{a}{2}$ - радиус впис. окружности.

$OB = R = a\sqrt{2}$ - радиус опис. окружности.

$S_{б.п} = 2la$

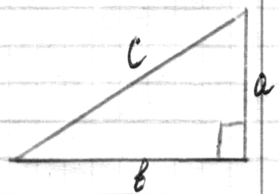
l - апофема (высота бок. грани)

$S_{п.п} = S_{б.п} + S_{осн} = $

$= 2la + a^2$

$V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h = \frac{a^2 \cdot h}{3}$

Теорема Пифагора

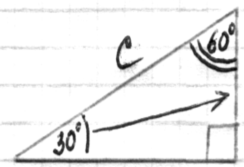


$c = \sqrt{a^2 + b^2}$ - гипотенуза.

$a = \sqrt{c^2 - b^2}$ - катет

$b = \sqrt{c^2 - a^2}$ - катет.

Катет, лежащий напротив угла = 30°, равен половине гипотенузы.



$a = \frac{c}{2}$

Цилиндр

$OO_1 = BC = h$

(высота совпадает с образующей).

$OC = R$ – радиус основания.

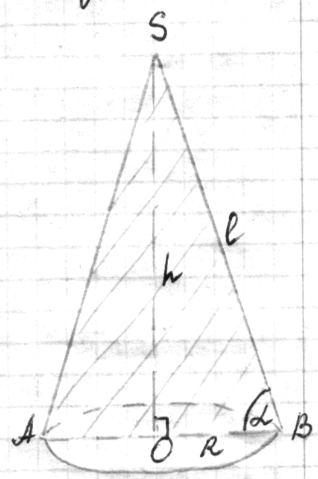
$S_{б.п} = 2\pi R h$

$S_{п.п} = 2S_{осн} + S_{б.п} = 2\cdot\pi R^2 + 2\pi R\cdot h = 2\pi R(R+h)$

$V = S_{осн}\cdot h = \pi R^2\cdot h$

$S_{осевого\ сечения} = S_{ABCD} = 2R\cdot h$

Конус



$SB = l$ – образующая

$SO = h$ – высота

$OB = R$ – радиус основан.

$\angle SBO = \angle\alpha$ – угол между образующей и основанием.

$\triangle SAB$ – осевое сечение

$S_{осев.\ сечен.} = h\cdot R$

$S_{б.п} = \pi R l$

$S_{п.п} = S_{б.п} + S_{осн.} = \pi R l + \pi R^2 = \pi R(l+R)$

$V = \frac{1}{3} S_{осн}\cdot h = \frac{\pi R^2 h}{3}$

Неопределённый интеграл.

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Свойства:

1°. $(\int f(x)dx)' = f(x);$

2°. $d(\int f(x)dx) = f(x)dx;$

3°. $\int dF(x) = F(x) + C;$

4°. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx, a - число;$

5°. $[f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$

6°. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$ и $u = \varphi(x)$,

то $\int f(u)du = F(u) + C.$

Таблица основных интегралов.

1. $\int dx = x + C;$

2. $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$, при $m \neq 1;$

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$

4. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C;$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C;$

6. $\int \ell^x dx = \ell^x + C;$

7. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$

8. $\int \sin x dx = -\cos x + C;$

9. $\int \cos x dx = \sin x + C;$

10. $\int \sec^2 x dx = tgx + C;$

11. $\int \cos ec^2 x dx = -ctgx + C;$

12. $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C;$

13. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|\ f(x)\,| + C;$

14. $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx = 2\sqrt{f(x)} + C;$

15. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} + C = arctgx + C;$

16. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C;$

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \arcsin\frac{x}{2} + C;$

18. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C;$

19. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C;$

20. $\int tgxdx = -\ln|\cos x| + C;$

21. $\int ctgxdx = \ln|\sin x| + C;$

22. $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a_2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C;$

23. $\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{2} + C;$

Замена переменной в неопределённом интеграле производится с помощью подстановок двух видов:

1) $x = \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ - монотонная, непрерывно дифференцируемая функция новой переменной t

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)dt\ ;$$

2) $u = \varphi(x)$, где u - новая переменная

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int f(u)du\ .$$

Интегрирование по частям.

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

u - та функция которая при дифференцировании упрощается;

dv - та часть, интеграл которой известен или может быть найден.

Например: для $\int P(x)\cdot \ell^{ax}dx,\ \int P(x)\cdot\sin axdx,\ \int P(x)\cdot\cos axdx,$ где $P(x)$ многочлен и за u следует брать $P(x)$;

для $\int P(x)\ln dx,\ \int P(x)\arcsin xdx,\ \int P(x)\arccos\ xdx$ за dv следует брать $P(x)dx$.

Предел функции.

Если $\alpha(x)$ бесконечно малая при $x \to x_o$. то $\lim\limits_{x\to x_o}\alpha(x) = 0,$

Если $\alpha(x)$ бесконечно малая при $x \to \infty$. то $\lim\limits_{x\to\infty}\alpha(x) = 0,$

Если $f(x)$ бесконечно большая при $x \to \infty$. то $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty,$

Если $f(x)$ бесконечно большое при $x \to x_o$. то $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = \infty.$

$\lim\frac{1}{0} = \infty;$ $\qquad \lim\frac{1}{\infty} = 0.$

Первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1; \qquad \lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1;$$

Второй замечательный предел:

$$\ell=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}; \qquad \ell=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x};$$

$$\ell=\lim_{x\to 0}\left(1+y\right)^{\frac{1}{y}}.$$

Правило Лопиталя: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

Раскрытие неопределённости $\dfrac{0}{0}$.

Для раскрытия неопределённости такого вида необходимо предварительно дробь сократить (разложить на множители), а затем найти предел

Раскрытие неопределённости $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Для раскрытия неопределённости такого вида необходимо и числитель и знаменатель разделить на x с наибольшим показателем степени.

Основные теоремы о пределах функции.

1°. Если $f(x)$ при x, стремящемся к *a*, имеет предел, то он единственный.

2°. $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\pm\varphi(x)\right)=\lim\limits_{x\to a}f(x)\pm\lim\limits_{x\to a}\varphi(x).$

3°. $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\cdot\varphi(x)\right)=\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}\varphi(x).$

4°. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)}$, если $\lim\limits_{x\to x}\varphi(x)\neq 0.$